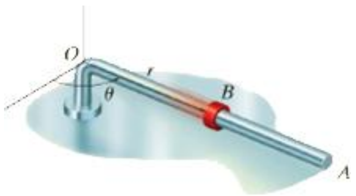
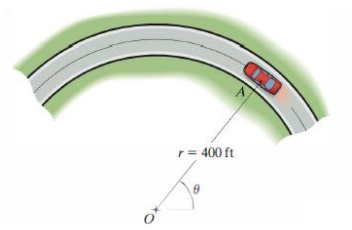
DİNAMİK (3.hafta)

EĞRİSEL HAREKET-2: Kutupsal /Polar Koordinatlar (r,θ)

Şekildeki gibi dönen bir çubuk üzerinde ilerleyen bilezik hem dönme hareketi hemde merkezden uzaklaşma hareketi yapar. Bu durumda hereket merkezden uzaklaşma (r) ve dönmenin (θ) değişimi olarak ifade edilebilir. Buna göre koordinat sistemimiz polar (kutupsal) koordinat sistemi (r,θ) olacaktır. Eğer yarıçapı sabit tutarsak değişim sadece θ doğrultusunda olursa ve bu durumda hareket dairsel harekete dönüşür. Önceki her iki hareket için bir de dikey yönde (z) hareket eklenirse o zaman harket silindirik koordinatlar sistemi (r,θ,z) üzerinde olacaktır. Burada formüllerde çok az değişimle üç tane hareketi incelemiş olacağız. Dairesel hareket (θ), Polar hareket (r,θ) ve Silindirik hareket (r,θ,z).

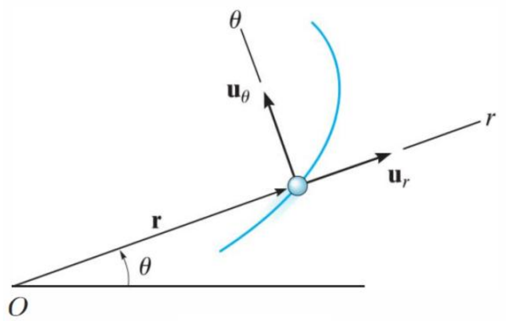




A-Polar Koordinatlarda (r,θ) Hareket Denkemleri

Konum denklemi

Herhangi bir anda partikülün konumu $\vec{r}$ vektörü ile ifade edilir. Bu vektörü birim vektör cinsinden yazarsak vektörel konum denklemi $\vec{r} = r\vec{u}_r$ olur. Burada $\vec{u}_r$ve $\vec{u}_\theta$ eksenler üzerindeki birim vektörlerdir.



Buna göre konum denklemiz r ekseni üzerinde vektörel olarak aşağıdaki şekilde ifade edilir.

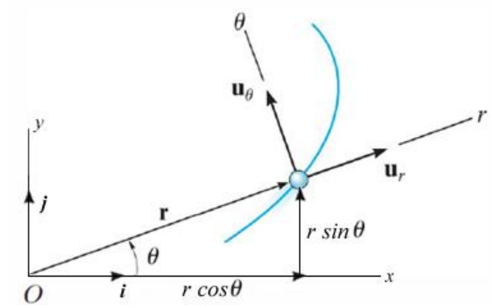
$$\vec{r} = r\vec{u}_r$$

Eğer orijin üzerinde x ve y ekseni var ise ve buraya göre konumu ifade edeceksek yine vektörel olarak

$$\vec{r} = rcos\theta\,\vec{i} + \,rcos\theta\,\vec{j}$$

Vektörleri skalere dönüştürdüğümüzde hem boyunu hemde açısınını ifade etmeliyiz. Buna göre $\vec{r}$ vektörünün boyu ve açısı aşağıdaki şekilde olur.

$$\boxed{r = \sqrt{(rcos\theta)^2 + \,(rcos\theta)^2}\;,\quad \theta = Arctan(\frac{rsin\theta}{rcos\theta})}$$



Hız denklemi

Partikülün hızı konum denkleminin zamana göre türevi alınarak bulunur. Türev alırken hangi büyüklüklerin değişken, hangilerinin sabit olduğuna dikkat edilmelidir. Konum denklemindeki $(r,\vec{u}_r)$ ifadelerinin her ikisi de değişkendir. Dikkat edilirse $\vec{u}_r$ vektörünün boyu 1 birimdir ve değişmemektedir fakat vektörün içinde açı da bulunmaktadır ve açısı değişmektedir. Bu nedenle değişkendir. r skaler boyu zaten hareket süresince değişmektedir. Bu durumda değişkendir. Bu durumda elde edilen denklem hız denklemi olacaktır. Hız denklemini bulalım.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \;\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\vec{u}}_r$$

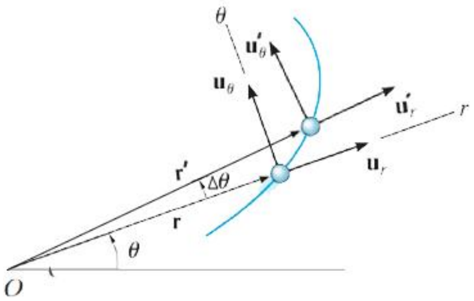
olur. Hatırlatma:a sabit u ve v her ikiside olursa çarpımın türevi önce birinincinin türevi çarpı yanındaki artı ikincinin türevi çarpı yanındaki şeklinde ifade edilerek yazılır. Sabit ise katsayı olarak çarpılır.

$$a.u.v = a(\dot{u}.v + u.\dot{v})$$

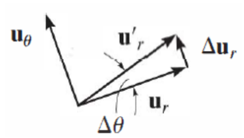
Buna göre $\vec{r} = r\vec{u}_r$ denkleminde r boyu değişken ve $\vec{u}_r$ birim vektörü içindeki açıda değişkendir. Bu nedenle çarpım halindeki $r\vec{u}_r$ bu iki değişkenin türevi $\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\vec{u}}_r$ olarak çıkar.

Tekrar başa dönersek $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\vec{u}}_r$ denklemi tam olarak kullanabileceğimiz bir hız denklemi değildir. Çünkü içerisindeki $\dot{\vec{u}}_r$ ifadesi birim vektörün türevi şeklindedir. Bu türevden kurtulmamız lazım.

Partikül yörünge üzerinde hareket ederken Δt kadar zaman sonra konumu r` vektörü olur. $\vec{u}_r$ birim vektörü $\vec{u}'_r$ ve açı değişimi Δθ olur.



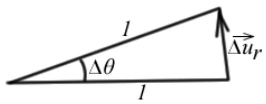
Birim vektörlerin boyu yine 1 birim kalacağından ortaya çıkan yeni $\vec{u}'_r$ vektörü, $\vec{u}_r$ vektörü ile bu vektördeki değişimi gösteren $\Delta\vec{u}_r$ vektörlerinin toplamı olacaktır.



Buna göre;

$$\vec{u}'_r = \vec{u}_r + \Delta\vec{u}_r$$

olur. Burada $\Delta\vec{u}_r$ vektörü küçük açılarda (gerçekte yay şeklinde fakat düz kabul ediyoruz) $\Delta\theta$ ye yani aradaki açının radyan cinsinden direk değerine eşittir.

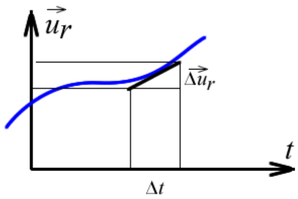


$\Delta\vec{u}_r = 1.\Delta\theta$ olur. Fakat $\Delta\vec{u}_r$ bir vektör olması nedeniyle yönünü kaybetmemesi gerekir. Bu vektörün yönü $\vec{u}_\theta$ birim vektörü ile aynı yönde olduğu için bu vektörle çarparak göstermeliyiz. Yani daha doğru olarak

$$\Delta\vec{u}_r = \Delta\theta.\vec{u}_\theta$$

olur. (İspat: yarıçapı 5 birim olan bir dairenin üzerindeki 10 dereceyi gören yayın uzunluğu 2.π.5.(10/360)=0,8725 birim çıkar. Diğer hesapla yapalım. Aradaki açı 10^0 olduğuna göre bu açı radyan olarak 2. π.10/360=0,1745 radyan olur. Yarıçapla çarparsak 0,8725 birim olur. Derece 10 derece olmasına rağmen yine aynı değer çıkmıştır.)

Tekrar ana denklemde kaldığımız yerden devam edelim. Buradaki $\dot{\vec{u}}_r$ ifadesi ne demektir? Bu ifade $\vec{u}_r$ birim vektörünün zamana göre türevi demektir. Türev ise fonksiyonun üzerinde alınan dar bir kesitte oluşan üçgenin karşı kenarının komşu kenara bölümü olarak ifade edilir. Eğer Δt ifadesi sonsuza kadar küçültülürse (yani limiti alınırsa) bu sefer Δ gösterimleri differansiyel dediğimiz d ile gösterdiğimiz, türev integral gibi işlemlerde gördüğümüz ifadelere dönüşür. Buna göre;



$$\dot{\vec{u}}_r = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{u}_r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta.\vec{u}_\theta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}\vec{u}_\theta$$

$$\dot{\vec{u}}_r = \frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta \Rightarrow \dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

olur. Buna göre hız denklemimiz içindeki türevli vektör ifadesinden kurtulabiliriz.

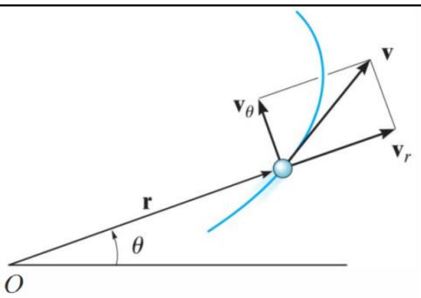
$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\vec{u}}_r$$

$$\vec{v} = \dot{r}.\vec{u}_r + r.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta$$

$$v_r = \dot{r}\ ,\ \ v_\theta = r.\dot{\theta}$$

Hız vektörünü skalere çevirelim (boy ve açısını bulalım). Açısını r eksenine göre bulsak yeterli olur.

$$\boxed{v = \sqrt{(\dot{r})^2 + (r.\dot{\theta})^2}\ , \qquad \varphi = Arctan(\frac{r.\dot{\theta}}{\dot{r}})}$$



İvme denklemi

Hız denkleminin bir kez daha türev alınması ivme denklemini verecektir. Yine aynı şekilde türev alabilmek için hız denkleminde hangi büyüklüklerin değiştiğini bilmeliyiz. Hareketi dikkatli bir şekilde inceleyecek olursak hız denklemindeki $(\dot{r}, \vec{u}_r, r, \dot{\theta}, \vec{u}_\theta)$ tüm ifadeler değişkendir. Buna göre ivme denklemi şu şekilde bulunur.

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

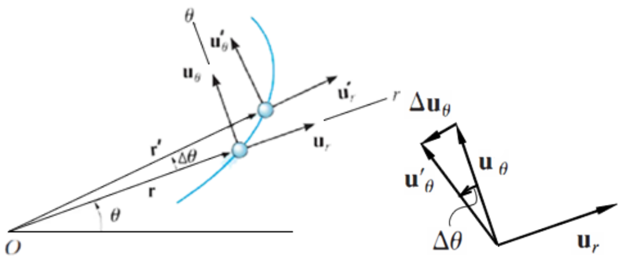
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \vec{a} = \ddot{r}\vec{u}_r + \dot{r}\dot{\vec{u}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\vec{u}}_\theta$$

Bu denklemde bulunan iki tane türevli birim vektör $(\dot{\vec{u}}_r, \dot{\vec{u}}_\theta)$ denklemin kullanımını engellemektedir. Bu ifadeleri türevden kurtaralım. $\dot{\vec{u}}_r$ ifadesinin eşitini hız başlığı altında bulmuştuk.

$$\dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

Şimdi ise $\dot{\vec{u}}_\theta$ ifadesinin karşılığını bulalım. Türevden kurtaralım.

Partikül Δt kadar zaman sonra ***r*** konumundan ***r***' konumuna geldiğinde $\boldsymbol{u_\theta}$ birim vektörü de $\boldsymbol{u`_\theta}$ ye dönüşecektir.



$$\vec{u}'_\theta = \vec{u}_\theta + \Delta\vec{u}_\theta$$

Burada $\Delta\vec{u}_\theta$ vektörü küçük açılarda (gerçekte yay şeklinde fakat düz kabul ediyoruz) radyan cinsinden $\Delta\theta$ açısı ile yarıçapın çarpımına eşittir. Yarıçapın yerinde olan vektörün boyu bir olduğu için etkisizdir. Dolayısı ile $\Delta\vec{u}_\theta$ vektörünün boyu (gerçekte yaydır)

$\Delta\vec{u}_\theta = 1.\Delta\theta$ olur fakat vektör olduğu için yönünüde gösteren bir ifadeye ihtiyaç vardır. Yönü -$\vec{u}_r$ vektörü yönünde olduğu için onunlada çarparız.

$$\Delta\vec{u}_\theta = -\Delta\theta\,\vec{u}_r$$

$\dot{\vec{u}}_\theta$ şeklindeki birim vektörü türevi bu durumda ne olacaktır.

$$\dot{\vec{u}}_\theta = \frac{\overrightarrow{\Delta\theta}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{u}_\theta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{-\Delta\theta.\vec{u}_r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{-\Delta\theta}{\Delta t}\vec{u}_r$$

$$\dot{\vec{u}}_\theta = -\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_r \Rightarrow \dot{\vec{u}}_\theta = -\dot{\theta}\vec{u}_r$$

olur. Buna göre ivme denklemimiz içindeki türevli vektör ifadelerinden kurtulmuş oluruz.

$$\vec{a} = \ddot{r}\vec{u}_r + \dot{r}\dot{\vec{u}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\vec{u}}_\theta$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\vec{u}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{u}_r$$

Şeklinde ivme denklemini elde etmiş olurz. Bu denklemin içinde r ve θ yönlerinde iki ivme vardır. Bu bileşenler cinsinden yazarsak

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\vec{u}_\theta$$

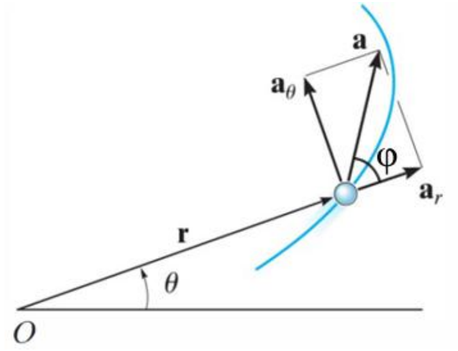
Buradan ivmenin bileşenleri skaler değerleri (vektörlerin boyları)

$$a_r = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\ ,\ \ a_\theta = \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)$$

Şeklinde çıkar. Bileşke vektör yani $\vec{a}$ skaler değerleri (vektörün içinde skaler olarak bir boy birde açı çıkar);

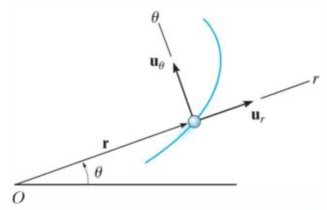
$$\boxed{\begin{gathered} a = \sqrt{\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)^2 + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)^2} \\ \varphi = Arctan\left(\frac{r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}}{\ddot{r} - r\dot{\theta}^2}\right) \end{gathered}}$$

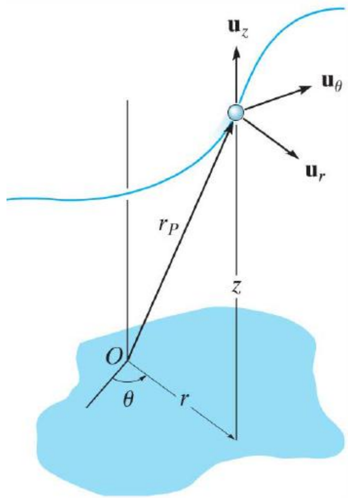
olur.



B-Silindirik Koordinatlarda Hareket Denklemleri

Buraya kadar bulduğumuz hareket denklemleri (konum, hız, ivme) polar koordinatlar üzerindeki (r,θ) hareketleri temsil etmektedir. Yani bir merkez etrafında hem dönen, hemde merkezden uzaklaşan bir hareket için çözüm verir. Bu hareket üzerine aynı zamanda yerden yukarı yada aşağıya doğru bir hareket eklersek (yani z yönünde) bu durumda üç eksende hareket gerçekleşir ve hareketin tipina bakarsak silindirik koordinatları temsil etmiş olur.





Bu harekette z ekseni üzerindeki birim vektörün hareket süresince duruşuna dikkat edersek açısı hiç değişmemektedir (hep dikey olarak kalmaktadır). Vektörün boyunun 1 olması ve açısınında hiç değişmemesi türev o eksendeki türevlerin içinden açıya ait bir türevlerin çıkmamasına ve sadece vektörün boyunu ifade türevlerin çıkmasına sebep olacaktır. Yeni durumda merkezden partiküle uzanan vektörü $\vec{r}_p$ ile gösterelim. Buna göre silindirik koordinatlardaki denklemleri yazarsak

$$\vec{r}_p = \vec{r} + \vec{z}$$

Birim vektör cinsinden konum denklemi;

$$\vec{r}_p = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$$

Olur. Bir kez türevini alırsak hız denklemini buluruz.

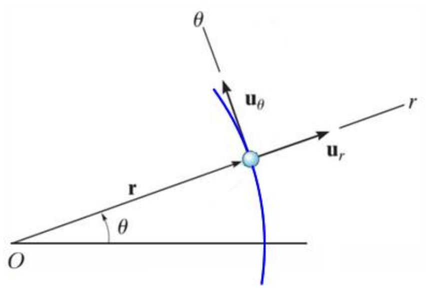
$$\boxed{\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z}$$

Olur. Hız denklemini bir kez türev alırsak ivme denklemin bulmuş oluruz. Aradaki işlemleri yukarıda yapmıştık. Sadece z eksenindeki ivme eklenmiş olacaktır.

$$\boxed{\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\,\vec{u}_z}$$

C-Dairesel Hareket Denklemleri

Polar hareket yaparken partükül r ekseni doğrultusunda dışarı ve içeri doğru hareket etmese yani sabir yarıçap ile merkez etrafında dönse polar koordinat formüllerimizdeki r nin birinci ve ikinci türevleri (hız ve ivmeler) sıfır olacaktır. Bunları sıfır olarak aldığımızda ortaya çıkan yeni denklemler dairesel hareketin denklemleri olmuş olacaktır .Buna göre dairesel hareket formülleri şu şekilde olur.



Partikülün konum denklemi;

$$\vec{r} = r\vec{u}_r$$

Bir kez türevini alırsak hız denklemini buluruz. Türev alırken r skaler boyunun sabit olduğu, $\mathbf{u_r}$ vektörünün boyu 1 ama açısının değiştiğini unutmayalım. Buna hız denklemi;

$$\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

Bu çevresel hız olur. Daireye dönüş yönünde teğet hız olur ve skaler büyüklüğü

$$\boxed{v = r\dot{\theta}}$$

Olacaktır. Bu denklem fizik derslerinden daha çok $v = r\omega$ bildiğimiz denklemdir.

Hız denklemini bir kez daha türev alırsak ivme denklemini buluruz. Dikkat edersek $\dot{r}$, $\ddot{r}$ ifadelerinin olduğu yerler sıfırlandı (r doğrultusunda değişim olmadığı için hız ve ivmeler sıfırdır).

$$\vec{a} = (-r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta$$

Bu ivme denkleminden bileşenlere baktığımızda merkeze doğru merkezcil ivme (a_r) ve teğetsel ivme (a_θ) şu şekilde çıkar.

$$\boxed{a_r = -r\dot{\theta}^2, \quad a_\theta = r\ddot{\theta}}$$

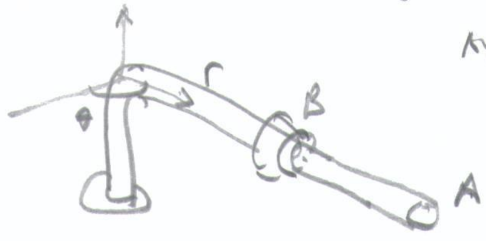
Bu denklemleri biz fizik derslerinden daha çok

$$a_n = -r\omega^2, \quad a_t = r\alpha$$

Olarak biliriz. Aynı denklemler olduğunu görebiliriz.

ÇÖZÜMLÜ PROBLEMLER

(5) **Örnek** Çubuk $\theta = (t^3)$ rad ile döndürülmektedir. Aynı zamanda B bileziği $r = (100\,t^2)$ mm dışa doğru ilerlemektedir. 1. snde bileziğin hızı ve ivmesini bulunuz.



Çözüm

Zamana bağlı konum denklemleri verildiğine göre bunların türevleri hız ve ivme denklemlerini verecektir.

$r = 100\,t^2$ (Konum denk.)

$\dot{r} = v_r = 200 \cdot t$ [Hız denk.]

$\ddot{r} = a_r = 200$ [İvme denk.]

$\theta = t^3$ [Konum denkle.]

$\dot{\theta} = \omega = 3t^2$ [Hız denkle.]

$\ddot{\theta} = \alpha = 6t$ [İvme denk.]

1. snde

$r = 100 \cdot 1^2 = 100$ mm

$\dot{r} = v_r = 200 \cdot 1 = 200$ mm/s

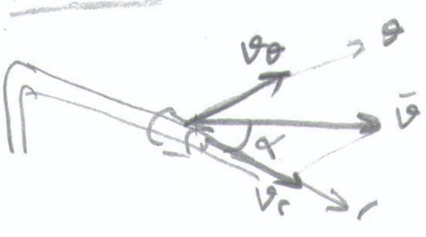
$\ddot{r} = a_r = 200$ mm/s²

$\theta = t^3 = 1^3 = 1$ rad $= 57{,}3°$

$\dot{\theta} = \omega = 3 \cdot t^2 = 3 \cdot 1^2 = 3$ rad/s

$\ddot{\theta} = \alpha = 6t = 6$ rad/s²

Hız sorusu



$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta$

$\vec{v} = \dot{r} \cdot \vec{u}_r + r \cdot \dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$

$v = \sqrt{\dot{r}^2 + (r \cdot \dot{\theta})^2}$

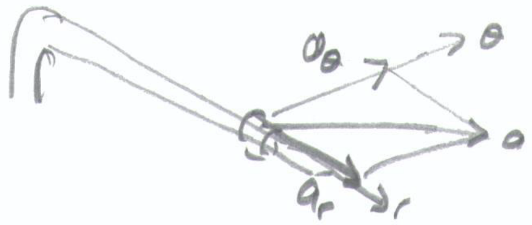
$v = \sqrt{200^2 + (100 \cdot 3)^2}$

$v = 361$ mm/s

$\text{Arctan}\left[\frac{300}{200}\right] = 56{,}3°$

(6)

İvme bulalım

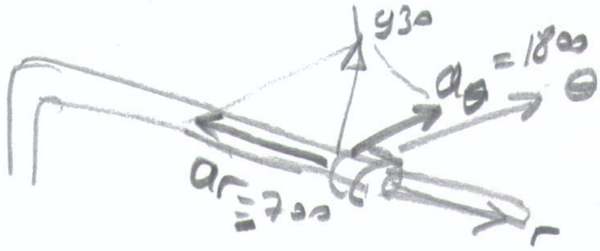


$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_\theta$$

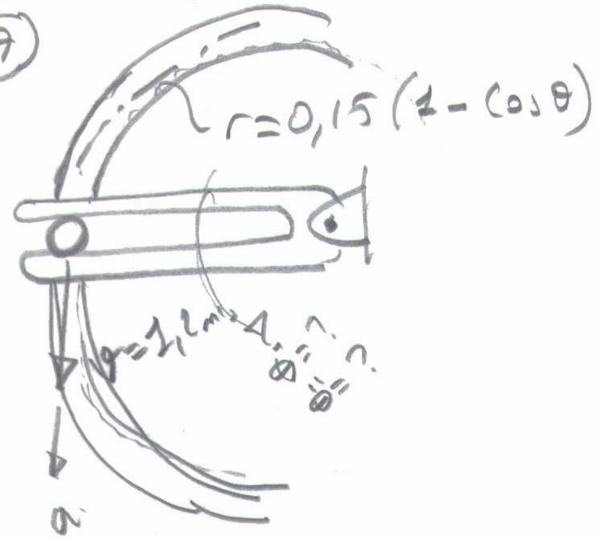
$$= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\vec{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\cdot \vec{u}_\theta$$

$$= (\underbrace{200 - 100\cdot 3^2}_{-700\,\vec{u}_r})\,\vec{u}_r + (\underbrace{100\cdot 6 + 2\cdot 200\cdot 3}_{1800\,\vec{u}_r})\,\vec{u}_r$$

$$a = \sqrt{(-700)^2 + (1800)^2} = 1930 \ mm/s^2.$$



(7)



θ = rad. cinsi

$\theta = 180°$ iken hızı

Çevresel $v = 1,2\,m/s$.

Çevresel $a = g\ m/s^2$

Çatalın

$\dot\theta = ?$

$\ddot\theta = ?$

Kutupsal koordinatlarda hareket etmektedir

Kuvvet denklemi (r de)

$$\boxed{r = 0,15(1-\cos\theta)}$$

$$r = 0,15 - 0,15\cdot\cos\theta$$

$$\dot r = \cancel{0,15} + 0,15\cdot\sin\theta\cdot\dot\theta$$

$$\boxed{\dot r = 0,15\cdot\sin\theta\cdot\dot\theta} \Rightarrow$$

$$\ddot r = 0,15\cdot\cos\theta\cdot\dot\theta\cdot\dot\theta + 0,15\cdot\sin\theta\cdot\ddot\theta$$

$$\boxed{\ddot r = 0,15\left(\cos\theta\cdot\dot\theta^2 + \sin\theta\cdot\ddot\theta\right)}$$

$\theta = 180°$ iken,

$$r = 0,15(1-\cos\theta)$$

$$= 0,15(1-\cos 180)$$

$$r = 0,3\ m.$$

$$\dot r = 0,15\cdot\sin\theta\cdot\dot\theta$$

$$\dot r = 0,15\cdot\sin(180)\cdot\dot\theta$$

radyal hız $\dot r = 0$

(8) $\theta = 180°$ iken

$$\ddot{r} = 0,15 \cdot \left(\underbrace{\cos\theta}_{\cos 180 = -1} \cdot \dot{\theta}^2 + \cancel{\sin}\,\theta \cdot \ddot{\theta} \right).$$

Merkezcil ivme $\ddot{r} = -0,15 \cdot \dot{\theta}^2$

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2}$$

$$1,2 = \sqrt{0^2 + (0,3 \cdot \dot{\theta})^2}$$

$\dot{\theta} = 4$ rad/s

$$a = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)^2 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})^2}$$

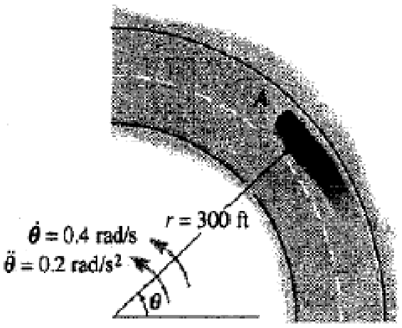
$$a = \sqrt{(0,15 \cdot \dot{\theta}^2 - r\dot{\theta}^2)^2 + (r \cdot \ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})^2}$$

$$a = \sqrt{(-0,15 \cdot 4^2 - 0,3 \cdot 4^2)^2 + (0,3 \cdot \ddot{\theta} + \cancel{2 \cdot 0 \cdot \dot{\theta}})^2}$$

$$9 = \sqrt{(-7,2)^2 + (0,3\ddot{\theta})^2}$$

$\ddot{\theta} = 18$ rad/s

12-139. A car is traveling along the circular curve of radius $r = 300$ ft. At the instant shown, its angular rate of rotation is $\dot{\theta} = 0.4$ rad/s, which is increasing at the rate of $\ddot{\theta} = 0.2$ rad/s^2. Determine the magnitudes of the car's velocity and acceleration at this instant.



Velocity : Applying Eq. 12 – 25, we have

$$v_r = \dot{r} = 0 \qquad v_\theta = r\dot{\theta} = 300(0.4) = 120 \text{ ft/s}$$

Thus, the magnitude of the velocity of the car is

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = \sqrt{0^2 + 120^2} = 120 \text{ ft/s} \qquad \textbf{Ans}$$

Acceleration : Applying Eq. 12 – 29, we have

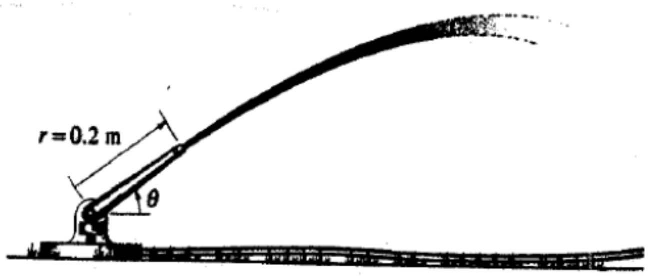
$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0 - 300\left(0.4^2\right) = -48.0 \text{ ft/s}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 300(0.2) + 2(0)(0.4) = 60.0 \text{ ft/s}^2$$

Thus, the magnitude of the acceleration of the car is

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = \sqrt{(-48.0)^2 + 60.0^2} = 76.8 \text{ ft/s}^2 \qquad \textbf{Ans}$$

***12-152.** At the instant shown, the watersprinkler is rotating with an angular speed $\dot{\theta} = 2$ rad/s and an angular acceleration $\ddot{\theta} = 3$ rad/s^2. If the nozzle lies in the vertical plane and water is flowing through it at a constant rate of 3 m/s, determine the magnitudes of the velocity and acceleration of a water particle as it exits the open end, $r = 0.2$ m.



$r = 0.2$

$\dot{r} = 3 \qquad \dot{\theta} = 2$

$\ddot{r} = 0 \qquad \ddot{\theta} = 3$

$v_r = 3$

$v_\theta = 0.2(2) = 0.4$

$v = \sqrt{(3)^2 + (0.4)^2} = 3.03$ m/s **Ans**

$a_r = 0 - (0.2)(2)^2 = -0.80$ m/s^2

$a_\theta = 0.2(3) + 2(3)(2) = 12.6$ m/s^2

$a = \sqrt{(-0.80)^2 + (12.6)^2} = 12.6$ m/s^2 **Ans**