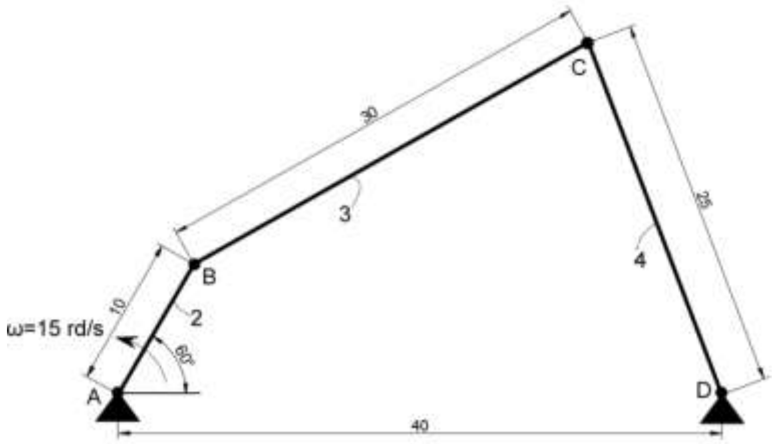
MEKANİZMA TEKNİĞİ (4. HAFTA)

KONUM ANALİZİ-(Konum denklemi ve Konum Tablosu)

Bir mekanizmayı mafsal ve mesnet noktalarından parçalara ayırdığımızda her bir uzvu vektörel konum denklemi ile gösterebiliriz. Bu durumda eğer mekanizma üzerindeki vektörel döngü kapalı bir poligon oluşturuyorsa bu vektörlerin toplamı sıfır olacaktır. Buradan türetilecek denklemlerle mekanizmanın tüm uzuvlarının konumları (her bir uzvun boy ve açısı) bulunabilir. Bütün bu işlemleri yine vektör matematiğini kullanarak çözeceğiz. Bu işlemler sonucunda hedefimiz mekanizma üzerindeki tüm boy ve açıları Konum Tablosu içerisine yazıp göstermektir.

Örnek:

Şekildeki mekanizmanın 2 numaralı uzvu sabit 15 rd/s hızla dönmektedir. Fotoğrafın çekildiği esnada mekanizmayı döndüren kolun açısı x den itibaren 60^0 olarak ölçülmüştür. Diğer kolların boyları bilindiğine göre 3 ve 4 numaralı çubukların açısı nedir? Sistemin konum denklemini çıkarınız. Tüm uzuvların konum değerlerini (boy ve açılarını) konum tablosunda gösteriniz.

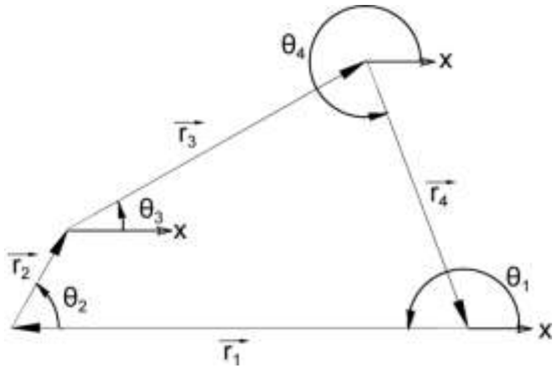


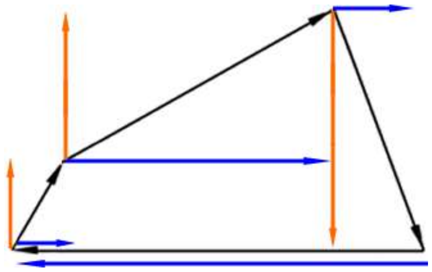
Çözüm:

Mekanizma üzerindeki mafsal ve mesnet noktalarından ayrılan her uzvu bir konum vektörü olarak gösterebiliriz. Bu vektörlerin yönlerini aynı yöne bakacak şekilde kapalı bir döngü haline getirirsek vektörel toplamları sıfır olacaktır.

Vektörel poligonu isimlendirirken sabit olan şase "1" numara ile isimlendirilir. Her vektörün açısı gösterilirken, başlangıcına x ekseni konur ve saatin tersi yönünde gösterilir. Tüm açılar aynı yöne bakmalıdır. Ayrıca vektörlerin yönleri de aynı yönde döngü oluşturmalıdır.

Aynı yöne bakan ve kapalı döngü oluşturan vektörlerin toplamının sıfır olduğunu aşağıdaki şekilde görebiliriz. Vektörleri dikey ve yatay bileşenlere ayrıdığımızda aynı eksen üzerindeki bileşenlerin toplamlarının birbirini götürdüğünü görebiliriz.





Konum Analizinde hedefimiz mekanizma üzerindeki tüm uzuvların boy ve açılarını bulmaktır. Buradaki 4 çubuk mekanizmasını 4 adet vektörle gösterdiğimize göre bu vektörlerin boy ve açıları Konum tablosu ile gösterilebilir. Bu tablo içerisine başlangıçta bilinen konum değerlerini ve bulunacak değerleri yazalım.

Konum Tablosu

	$\overrightarrow{r_1}$	$\overrightarrow{r_2}$	$\overrightarrow{r_3}$	$\overrightarrow{r_4}$
r (boy)	40 cm	10 cm	30 cm	25 cm
θ (açı)	180^0	60^0	**θ_3=?**	**θ_4=?**

Bu tabloda iki tane bilinmeyen vardır. Bu iki bilinmeyeni vektörel denklemleri kullanarak bulalım. İstersek vektörel denklem yerine geometrik kuralları kullanarak da çözebiliriz. Yada ölçekli olarak çizersek (elle çizim yerine AutoCad ve Solidworks gibi programlar kullanarak çizmek kesin sonuç verir) bilinmeyen bu değerleri rahatlıkla bulabiliriz. Fakat bulduğumuz bu değerler sadece fotografın çekildiği esna için çözüm verir. Geometrik yada Çizim yöntemi her konum değişiminde yeniden hesaplamayı gerektirir. Oysa mekanizmanın analizi için hareketin her konumunu hesaplayabilmek gerekir. Bu durumda Geometrik hesaplama ve Çizim yöntemi pratik olmaz.

Onun yerine Vektörel yöntemle bu açıları veren matematiksel denklemler bulunursa ve bunlarda programa dökülürse, mekanizmanın her hareketi için konumlar kolaylıkla hesaplanabilir. Bu açıdan hesaplamalarda vektörel denklemleri kullanmak daha önemlidir.

Şimdi vektörel yöntemle Konum Tablosundaki bilinmeyenleri nasıl hesaplayacağımıza bakalım.

Vektörel poligondaki tüm vektörlerin toplamı sıfır olacaktır (aynı yöne bakan ve kapalı döngü oluşturan vektörlerin toplamı sıfırdır).

$$\overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{r_2} + \overrightarrow{r_3} + \overrightarrow{r_4} = 0$$

Bunları birim vektörler cinsinden yazalım. $\overrightarrow{\mu(\theta)}$ birim vektördür. (Boyu 1 ve açısı θ dır).

$$\boxed{r_1\,\overrightarrow{\mu(\theta_1)} + r_2\,\overrightarrow{\mu(\theta_2)} + r_3\,\overrightarrow{\mu(\theta_3)} + r_4\,\overrightarrow{\mu(\theta_4)} = 0}$$

Bu denklem **Konum denklemi** olmuş oluyor. Bilinenleri ve bilinmeyenleri üzerinde gösterelim.

$$\underbrace{r_1}_{40\text{ cm}}\,\underbrace{\overrightarrow{\mu(\theta_1)}}_{180^0} + \underbrace{r_2}_{10\text{ cm}}\,\underbrace{\overrightarrow{\mu(\theta_2)}}_{180^0} + \underbrace{r_3}_{30\text{ cm}}\,\underbrace{\overrightarrow{\mu(\theta_3)}}_{?} + \underbrace{r_4}_{25\text{ cm}}\,\underbrace{\overrightarrow{\mu(\theta_4)}}_{?} = 0$$

Denklemde iki tane bilinmeyen var.
Bilinmeyenlerden birini yok etmek için, yanındaki birim vektörü sıfır yapan bir katsayı ile çarpalım.
Bu katsayı yine bir birim vektör olacaktır.
Önceki konuda birim vektörlerin skaler çarpıp formüllerine bakınız.

$$\overrightarrow{\sigma(\theta_4)} * \{ \; r_1\,\overrightarrow{\mu(\theta_1)} + r_2\,\overrightarrow{\mu(\theta_2)} + r_3\,\overrightarrow{\mu(\theta_3)} + r_4\,\overrightarrow{\mu(\theta_4)} \} = 0$$

$\underbrace{\quad}_{?} \qquad \underbrace{\quad}_{?}$

$\mu(\theta_4)$ ü yok etmek için $\sigma(\theta_4)$ ile çarpıyoruz. Çünkü $\overrightarrow{\mu(\theta_n)} . \overrightarrow{\sigma(\theta_n)} = 0$ dır.

$$r_1 \underbrace{\overrightarrow{\mu(\theta_1)}\,\overrightarrow{\sigma(\theta_4)}}_{Sin(\theta_1-\theta_4)} + r_2 \underbrace{\overrightarrow{\mu(\theta_2)}\,\overrightarrow{\sigma(\theta_4)}}_{Sin(\theta_2-\theta_4)} + r_3 \underbrace{\overrightarrow{\mu(\theta_3)}\,\overrightarrow{\sigma(\theta_4)}}_{Sin(\theta_3-\theta_4)} + r_4 \underbrace{\overrightarrow{\mu(\theta_4)}\,\overrightarrow{\sigma(\theta_4)}}_{0} = 0$$

Skaler birim vektör çarpımlarının sonucu formüller kullanarak yazalım.

$$r_1\, Sin(\theta_1 - \theta_4) + r_2\, Sin(\theta_2 - \theta_4) + r_3\, Sin(\theta_3 - \theta_4) = 0 \quad ....[1]$$

Denklemi çözebilmek için bir denklem daha bulalım. Bu sefer $\mu(\theta_3)$ ü yok etmek için $\sigma(\theta_3)$ ile çarpalım.

$$\overrightarrow{\sigma(\theta_3)} * \{ r_1 \overrightarrow{\mu(\theta_1)} + r_2 \overrightarrow{\mu(\theta_2)} + r_3 \underbrace{\overrightarrow{\mu(\theta_3)}}_{?} + r_4 \underbrace{\overrightarrow{\mu(\theta_4)}}_{?} \} = 0$$

$$r_1 \underbrace{\overrightarrow{\mu(\theta_1)}\,\overrightarrow{\sigma(\theta_3)}}_{Sin(\theta_1-\theta_3)} + r_2 \underbrace{\overrightarrow{\mu(\theta_2)}\,\overrightarrow{\sigma(\theta_3)}}_{Sin(\theta_2-\theta_3)} + r_3 \underbrace{\overrightarrow{\mu(\theta_3)}\,\overrightarrow{\sigma(\theta_3)}}_{0} + r_4 \underbrace{\overrightarrow{\mu(\theta_4)}\,\overrightarrow{\sigma(\theta_3)}}_{Sin(\theta_4-\theta_3)} = 0$$

$$r_1\, Sin(\theta_1 - \theta_3) + r_2\, Sin(\theta_2 - \theta_3) + r_4\, Sin(\theta_4 - \theta_3) = 0 \quad ....\ [2]$$

1 ve 2 nolu denklemleri **Sin(A-B) = SinA CosB - CosA SinB** trigonometrik dönüşüm formülü ile açalım.

$$r_1\,(Sin\,\theta_1\,Cos\,\theta_4 - Cos\,\theta_1\,Sin\,\theta_4) + r_2\,(Sin\,\theta_2\,Cos\,\theta_4 - Cos\,\theta_2\,Sin\,\theta_4) + r_3\,(Sin\,\theta_3\,Cos\,\theta_4 - Cos\,\theta_3\,Sin\,\theta_4) = 0$$

$$r_1\,Sin\,\theta_1\,Cos\,\theta_4 - r_1\,Cos\,\theta_1\,Sin\,\theta_4 + r_2\,Sin\,\theta_2\,Cos\,\theta_4 - r_2 Cos\,\theta_2\,Sin\,\theta_4 + r_3\,Sin\,\theta_3\,Cos\,\theta_4 - r_3\,Cos\,\theta_3\,Sin\,\theta_4 = 0$$

$$40\,Sin 180\,Cos\,\theta_4 - 40\,Cos\,180\,Sin\,\theta_4 + 10\,Sin\,60\,Cos\,\theta_4 - 10\,Cos\,60\,Sin\,\theta_4 + 30\,Sin\,\theta_3\,Cos\,\theta_4 - 30\,Cos\,\theta_3\,Sin\,\theta_4 = 0$$

$$0 + 40\,Sin\,\theta_4 + 8{,}66\,Cos\,\theta_4 - 5\,Sin\,\theta_4 + 30\,Sin\,\theta_3\,Cos\,\theta_4 - 30\,Cos\,\theta_3\,Sin\,\theta_4 = 0$$

Aynı işlemleri 2 nolu denklem içinde yapalım.

$$r_1\,(Sin\,\theta_1\,Cos\,\theta_3 - Cos\,\theta_1\,Sin\,\theta_3) + r_2\,(Sin\,\theta_2\,Cos\,\theta_3 - Cos\,\theta_2\,Sin\,\theta_3) + r_4\,(Sin\,\theta_4\,Cos\,\theta_3 - Cos\,\theta_4\,Sin\,\theta_4) = 0$$

$$r_1\,Sin\,\theta_1\,Cos\,\theta_3 - r_1\,Cos\,\theta_1\,Sin\,\theta_3 + r_2\,Sin\,\theta_2\,Cos\,\theta_3 - r_2\,Cos\,\theta_2\,Sin\,\theta_3 + r_4\,Sin\,\theta_4\,Cos\,\theta_3 - r_4\,Cos\,\theta_4\,Sin\,\theta_3 = 0$$

$$40\,Sin\,180\,Cos\,\theta_3 - 40\,Cos\,180\,Sin\,\theta_3 + 10\,Sin\,60\,Cos\,\theta_3 - 10\,Cos\,60\,Sin\,\theta_3 + 25\,Sin\,\theta_4\,Cos\,\theta_3 - 25\,Cos\,\theta_4\,Sin\,\theta_3 = 0$$

$$0 + 40\,Sin\,\theta_3 + 8{,}66\,Cos\,\theta_3 - 5\,Sin\,\theta_3 + 25\,Sin\,\theta_4\,Cos\,\theta_3 - 25\,Cos\,\theta_4\,Sin\,\theta_3 = 0$$

Ortaya çıkan bu iki denklemi biraz daha formatlı gösterelim.

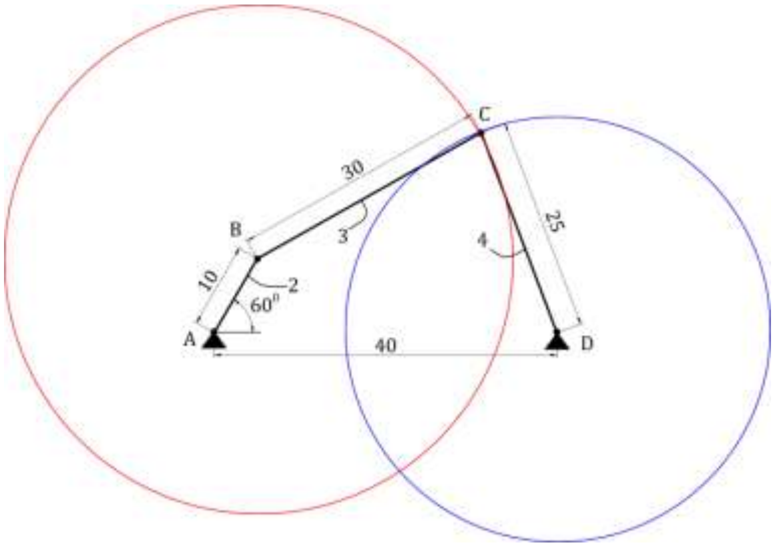
$40\,Sin\,\theta_4 + 8{,}66\,Cos\,\theta_4 - 5\,Sin\,\theta_4 + 30\,Sin\,\theta_3\,Cos\,\theta_4 - 30\,Cos\,\theta_3\,Sin\,\theta_4 = 0$
$40\,Sin\,\theta_3 + 8{,}66\,Cos\,\theta_3 - 5\,Sin\,\theta_3 + 25\,Sin\,\theta_4\,Cos\,\theta_3 - 25\,Cos\,\theta_4\,Sin\,\theta_3 = 0$

Sonuç olarak denklemlerimiz aşağıdaki şekilde olacaktır.

$35\,Sin\,\theta_4 + 8{,}66\,Cos\,\theta_4 + 30\,Sin\,\theta_3\,Cos\,\theta_4 - 30\,Cos\,\theta_3\,Sin\,\theta_4 = 0$
$35\,Sin\,\theta_3 + 8{,}66\,Cos\,\theta_3 + 25\,Cos\,\theta_3\,Sin\,\theta_4 - 25\,Sin\,\theta_3\,Cos\,\theta_4 = 0$

Bu iki denklem **non-lineer** bir denklem takımı olduğu için analitik olarak bunu çözemeyiz. Bilgisayar kullanarak iteratif şekilde sayısal yöntemlerle çözebiliriz. Bunun için sayısal yöntemlerden Newton-Raphson metodunu kullanarak θ_3 ve θ_4 açılarını bulmaya çalışalım.

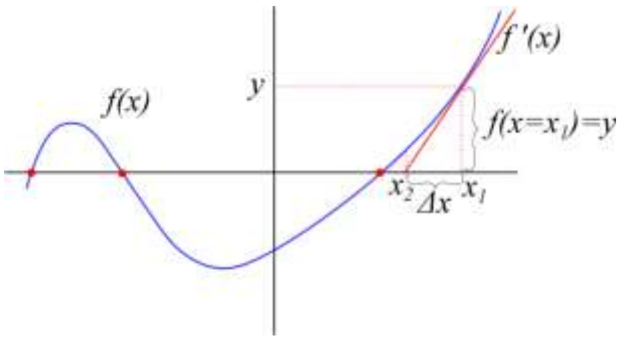
Burada 3 ve 4 nolu uzuvların A, B ve D noktalarındaki koordinatları bilinmektedir. C noktasının ise konumu bilinmemektedir. C noktası iki dairenin kesişim noktası olacaktır. Dolayısı ile daire denklemlerinin ortak çözümü ile de bu iki noktayı bulabiliriz. Bunu da ikinci yöntem olarak gösterelim.



1. Yöntem: Newton Raphson yöntemi (Teğet yöntemi) ile denklemin köklerinin bulunması

Önce yöntemi öğrenelim. Şekildeki gibi herhangi bir f(x) fonksiyonu olduğunu varsayalım. Bu fonksiyon x eksenini bir çok noktadan kesebilir. x eksenini kesen bu noktalara fonksiyonun kökleri denir ve bizde bu noktaları bulmaya çalışacağız. Bu noktalar fonksiyonu sıfır yapan değerlerdir. Yani f(x)=y=0 olmaktadır.

Pozitif bölgedeki kökü bulmaya çalışalım. Bunun için x_1 gibi bir nokta olarak tahmini bir değer alırsak ve bu değeri f(x) de ve türevi olan f'(x) de yerine yazarsak her iki denklemde bizi y gibi bir değere götürecektir. (Türev denklemi o noktada fonksiyonun eğimini gösteren doğrunun denklemi olur). Türevin x eksenini kestiği noktaya x_2 dersek bu durumda ortaya çıkan üçgenin karşı kenarı y olurken komşu kenarı Δx olacaktır. Karşı kenarın komşu kenara oranı türev olacağına göre bu denklemden Δx çekersek ve $x_2=x_1-\Delta x$ yerine yazdığımızda Newton-Raphson denklemimizi bulmuş oluruz. Şimdi bu denklemleri topluca yazalım.



f(x) de x yerine x_1 yazarsak y yi buluruz.

$$f(x = x_1) = y$$

x_1 noktasının olduğu noktada türev denklemini yazarsak, karşı kenarın komuşu kenara oranı olacaktır.

$$f'(x_1) = \frac{y}{\Delta x} = \frac{f(x_1)}{\Delta x}$$

$$\Delta x = \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Öte yandan x_2 değerini şu şekilde yazabiliriz.

$$x_2 = x_1 - \Delta x$$

Bu durumda bizi çözüme götüren Newton denklemimiz şu şekle dönüşür.

$$\boxed{x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}}$$

Bilgisayarla bu denklem takımını çözerken iterasyonu durdurmak için **f(x)<Ɛ** gibi bir değer alabiliriz. Yada N adet iterasyon sonra durdurmayı düşünebiliriz. Konuyu örnekleyerek pekiştirelim.

Örnek: f(x) = x^2-2x-2 fonksiyonunun köklerini Newton-Raphson yöntemi ile bulunuz.

f(x) = x^2-2x-2

f'(x) = 2x-2

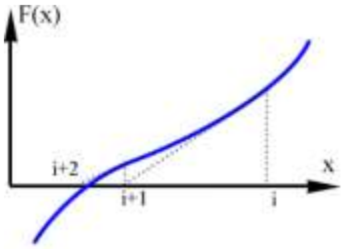
Başlangıç değeri olarak x değerini tahmini olarak almamız gerekiyor. Bu değeri belirlerken çok fazla rastgele olmaması için iki tane sayı belirleyip bunların fonksiyon işaretlerine bakabiliriz. Birinde f(x) fonksiyonu pozitif, diğerinde negatif çıkıyorsa bu arada kök var demektir. Bunun için x=0 ve x=5 sayılarını deneyelim. f(0)=0^2-2.0-2= -2 çıkar. f(5)=5^2-2.5-2=13 çıkar. Böylece bura arada kök olduğundan emin olduk. Başlangıç tahmini x değerini 3 alalım ve iterasyona başlayalım.

N	x0	f(x)=x2-2x-2	f'(x)=2x-2	x1=x0-(f(x)/f'(x))
1	**3**	3^2-2.3-2=**1**	2.3-2=**4**	3-1/4=**2,75**
2	2,75	0,0625	3,5	2,732142857
3	2,732142857	0,000318878	3,464285714	2,73205081
4	2,73205081	8,47268E-09	3,46410162	2,732050808
5	**2,732050808**	**0**	3,464101615	2,732050808

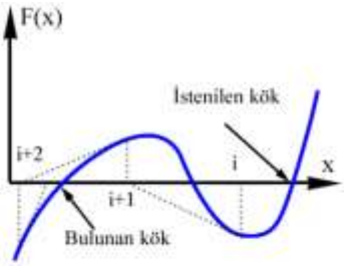
5. iterasyonda kök tam olarak bulunmuştur. Yani f(x)=0 olmuştur. Bu durumda denklemi sıfır yapan değer(kök) **2,732050808** olmuş olur.

Bu tür lineer olmayan denklem takımlarını çözmek için başka numerik metodlarda mevcuttur. Burada gerek basit olması ve gerekse mekanizmaların çözümünde oldukça iyi sonuç vermesi nedeni ile Newton-Raphson metodu kullanılacaktır.

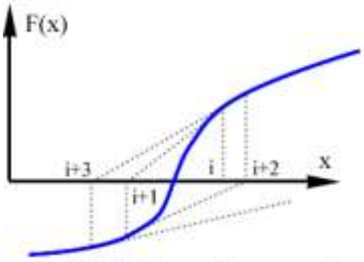
Newton Raphson algoritması çoğu problemde sonuca hızlıca yaklaşan bir sonuç verecektir. Ancak eğer ilk tahmin değeri olan x(0) değeri köke yeteri kadar yakın değil ise, hata miktarı olan **Ɛ** da eldeki probleme göre çok küçük seçildi ise, veya çözülmesi istenilen problemde F(x) fonksiyonu ve türevleri düzgün ve yumuşak bir davranış göstermiyorlarsa, çözüm bulunamıyabilir. Bazı durumlarda bulunan çözüm aranılan çözüm olmayabilir (lineer olmayan denklemlerde F(x)=0 denklemini sağlayan birçok kök olabilir). Aşağıdaki şekillerde yöntem kökleri bulamamaktadır.



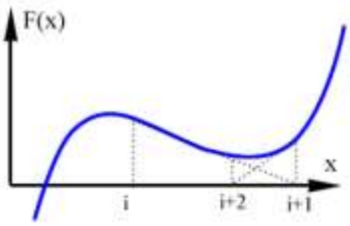
a) Bir köke yaklaşma-yakınsama



b) Başka bir köke yakınsama



c) Bir kökden uzaklaşma-ıraksama



d) Bir yerel minimuma yakınsama