

OPTİMİZASYON TEKNİKLERİ-2. Hafta

GİRİŞ

Mühendislik açısından bir işin tasarlanıp, gerçekleştirilmesi yeterli değildir. İşin en iyi çözüm yöntemiyle en verimli bir şekilde yapılması bir anlam ifade eder. İşin optimize edilmesi mühendislik açısından her zaman hedeflenen bir konudur. Bu amaçla geliştirilen teknikler prosesin, tasarımın yada problemin çözümü için kullanılır. Bir mühendisin hedefi, her zaman yaptığı işte optimum çözümü yakalamak olmalıdır. Günlük yaşamda da optimum çözümü her zaman yakalamaya çalışırız. Mühendislikte daha çok;

- En iyi tasarımı nasıl elde ederiz.
- En az maliyete nasıl ulaşırız
- Minimum ağırlık, maksimum mukavemeti nasıl sağlarız
- En kısa yolu nasıl buluruz

gibi binlerce konu optimizasyonun uygulanacağı alanları bize gösterir.

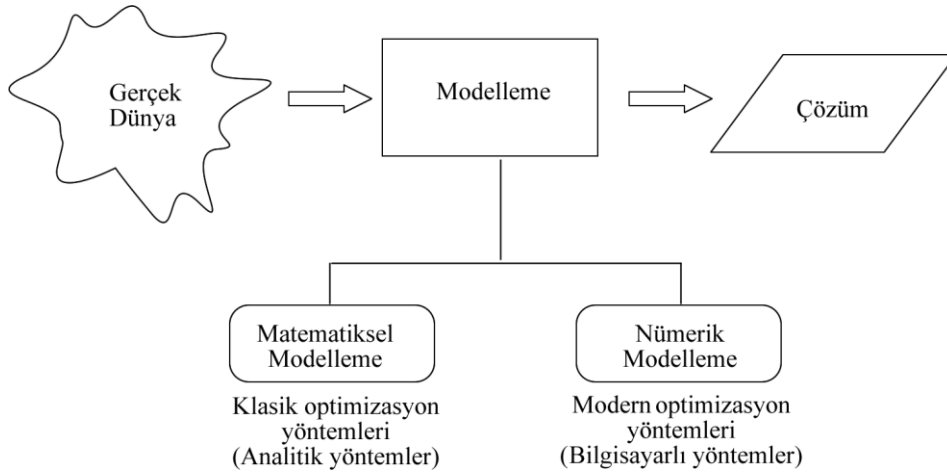
Bütün optimizasyon problemlerinin çözümü için etkili tek bir metot olmadığından, her farklı tip problem için farklı metodlar geliştirilmiştir.

Tanım:

En basit anlamı ile optimizasyon eldeki **kısıtlı kaynakları** en optimum biçimde kullanmak olarak tanımlanabilir. Matematiksel olarak ifade etmek gerekirse optimizasyon kısaca bir fonksiyonun **minimize veya maksimize** edilmesi olarak tanımlanabilir.

Başka bir tanımlama ile birazda **sosyal bakış açısı** ile tanımlanırsa “belirli amaçları gerçekleştirmek için **en iyi kararları** verme sanatı” veya “belirli koşullar altında herhangi bir şeyi **en iyi yapma**” olarak da tanımlanabilir.

Değişen teknolojilerin, sınırlı kaynakların, artan rekabetin, karmaşık hale gelen sistemlerin doğurduğu problemlerin çözümünün güçleşmesi optimizasyon kavramını güncel tutmaktadır ve **kullanılmadığı bir alan** hemen hemen yok gibidir.

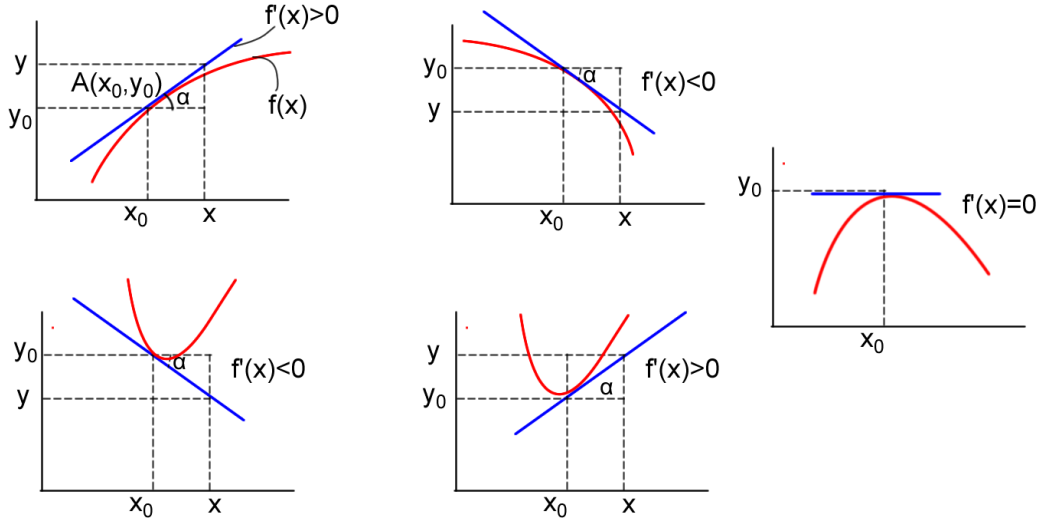


TEK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARIN OPTİMİZASYONU (maks/min bulunması)

Matematiksel olarak bir fonksiyonun optimizasyonu o fonksiyonun maksimum yada minimum noktalarının aranmasıdır. Bir fonksiyonu maksimum yada minimum yapan nokta, o fonksiyona ait birinci türevi sıfır yapan x değerleridir. Birinci türev bize o noktada maks/min olup olmadığını verir fakat hangisi olduğunu vermez. Yani tek başına maks mı yada min mi var bunu vermez. Bunu anlayabilmek için ya birinci türevin işaretlerinin nasıl değiştiğine bakmak gerekir, yada ikinci türeve geçip direk sonucun pozitif yada negatif olup olmama durumuna bakmak gerekir.

Türevin Anlamı: Türevin geometrik anlamı $y=f(x)$ fonksiyonunun $x=x_0$ da türevi $A(x_0, y_0)$ noktasındaki teğetin eğimine eşittir. Bu durum ikinci derece fonksiyonda bu şekildedir. Yani denklem ikinci derece iken türevi alındığında birinci derece bir denkleme dönüşür.

$$f'(x_0) = m = \tan \alpha = (y - y_0) / (x - x_0)$$



Maks-Min için Kurallar

A) $f'(x)=0$ denkleminin kökleri optimum (mak/min) noktaları verir.

B) Maks yada Min dan hangisinin olduğunu bulmak için ise;

a) Birinci türevin işaretlerinin nasıl değiştiğine bakılır.

Minimum noktalarda $f'(x_0)$ negatiften->pozitive geçer

$$-f'(x_0-h) > 0$$

$$-f'(x_0+h) < 0$$

Maksimum noktalarda $f'(x_0)$ pozitiften->negatife geçer

$$-f'(x_0-h) < 0$$

$$-f'(x_0+h) > 0$$

Tam mak yada min noktasında $f'(x_0)$ sıfır olur.

$$f'(x_0) = 0$$

b) İkinci türevin x_0 da direk değerine bakılır.

- $f''(x_0) < 0$ ise x_0 noktası maksimumdur.
- $f''(x_0) > 0$ ise x_0 noktası minimumdur.
- $f''(x_0) = 0$ ise x_0 in ekstreum olması için daha yüksek mertebeden türevlere bakılması gerekir. Bu durumda;

$$f^{(n-1)}(x_0) = 0 \text{ ve } f^{(n)}(x_0) \neq 0 \text{ ise yani } \{f''(x_0) = 0 \text{ ve } f'''(x_0) \neq 0 \text{ gibi}\}$$

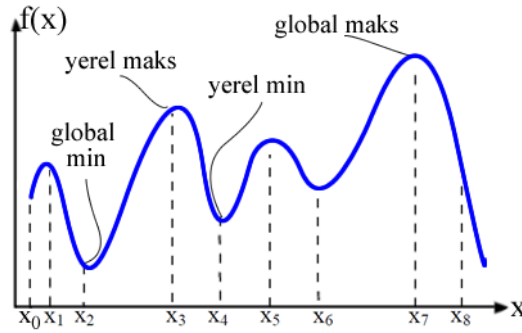
- n tek ise bir büküm noktası vardır.
- n çift ise iki durum söz konusudur.
 - $f^{(n)}(x_0) < 0$ ise maksimuma sahiptir
 - $f^{(n)}(x_0) > 0$ ise minimuma sahiptir

Bilgisayarla max ve min bulunması: Bilgisayarda artışı olarak bir fonksiyonun maks ve min aradığımız aradığımız noktanın öncesinde ve sonrasındaki tüm h değerleri için yazacak olursak aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz.

a) $f(x_0) \leq f(x_0+h)$ ise $f(x)$ fonksiyonu x_0 'da minimuma sahiptir. Burada x_0 noktası üzerine h artış adımlarını artı ve eksi şeklinde eklediğimizde, x_0 noktası etrafındaki bir bölgede arama yapmışız demektir. Bu esnada bulduğumuz tüm değerlerden $f(x_0)$ değerimiz küçükse x_0 noktası etrafında minimum var demektir.

b) $f(x_0) \geq f(x_0+h)$ ise $f(x)$ fonksiyonu x_0 'da maksimuma sahiptir.

Bu aralıkta bulduğumuz $f(x_0)$ değeri global min yada maks olmayabilir. Globalde garantisi yoktur. Lokal min-maks dir.



Örnek: $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$ fonksiyonun minimum ve maksimum noktalarını (ekstramumlarını) bulunuz.

Eksramum noktalar birinci derece türevi sıfır yapan x noktalarında bulunur. Bu noktaları bulabilmek birinci türevin (2. denklemin) köklerini bulmalıyız. Bu köklerin olduğu yerlerde eksramumlar bulunur.

Bu ekramumların min yada maks dan hangisi olup olmadığı bir sonraki türev olan ikinci derece türevin direk işaretinden anlaşılır yada birinci türevin işaretinin nasıl değiştiğine bakmak gerekir. Denklemin türevlerini alırsak

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

$$f''(x) = 6x - 4$$

olur. Burada $f'(x)=0$ yapan değerler kökleri olacaktır. Bu kökleri bulalım.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{6} = \left\{ \frac{1}{3}, 1 \right\}$$

Bu değerlerin olduğu yerlerde maks yada min sahip ama hangisi olduğu belli değil. Bunu anlamak için ikinci türevin direk işaretine yada birinci türevin işaretinin nasıl değiştiğine bakmalıyız. Önce 2. türevin işaretine bakma yöntemiyle bakalım.

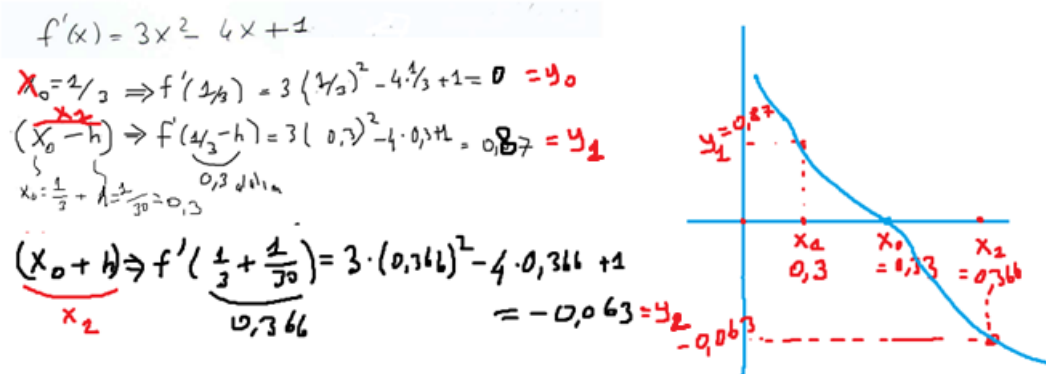
$$f''(x) = 6x - 4 \Rightarrow 6 \cdot \frac{1}{3} - 4 = -2 \quad \{x_1 = \frac{1}{3} \text{ olduğu yerde } f(x) \text{ fonksiyonu maksimuma sahiptir.}$$

Bu yerel maks da olabilir, global maks da olabilir. garantisizdir.

$$f''(x) = 6x - 4 \Rightarrow 6 \cdot 1 - 4 = +2 \quad \{x_2 = 1 \text{ olduğu yerde } f(x) \text{ fonksiyonu minimuma}\}$$

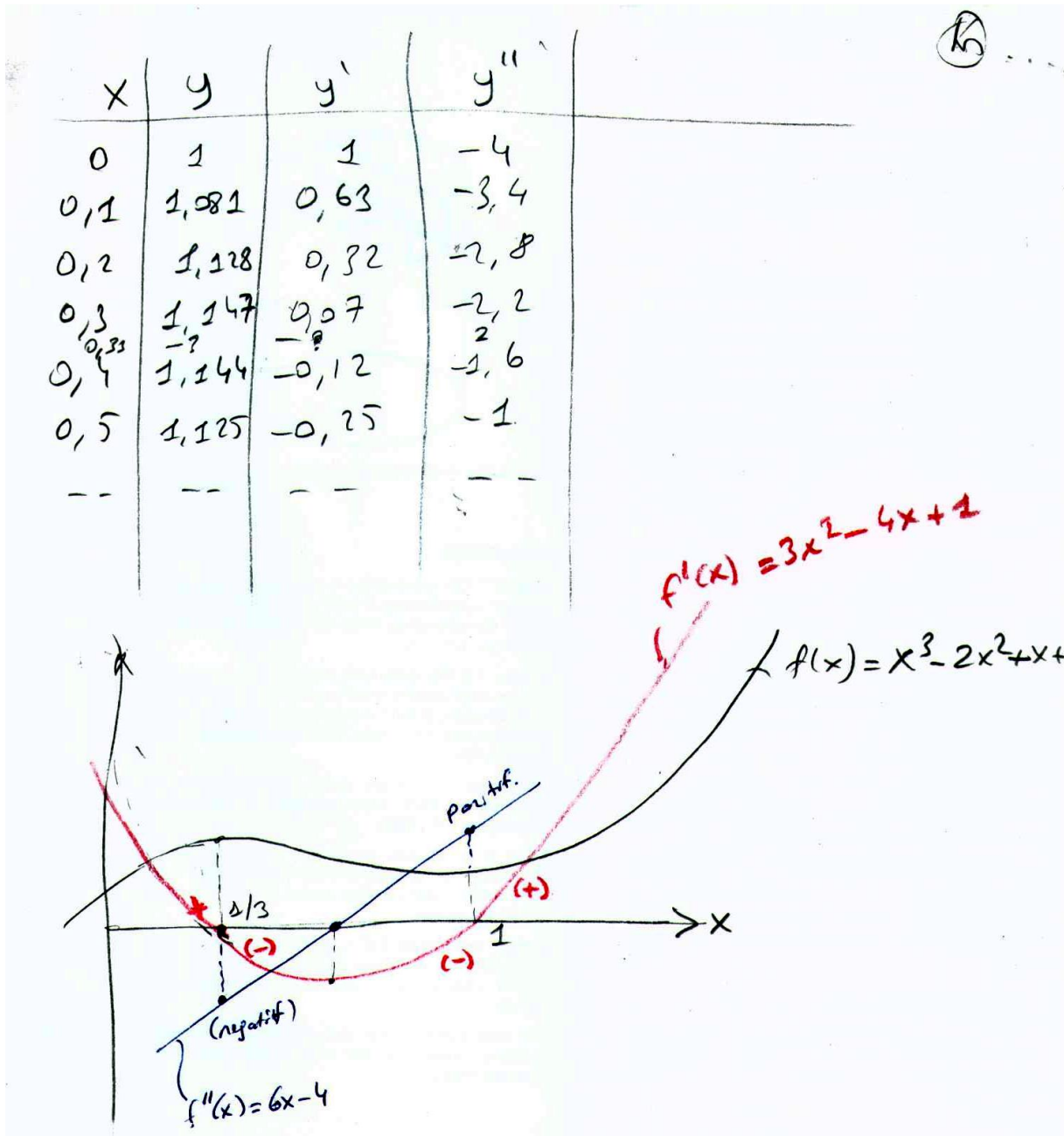
}

Önce birinci türevin işaretinin nasıl değiştiğine bakalım.



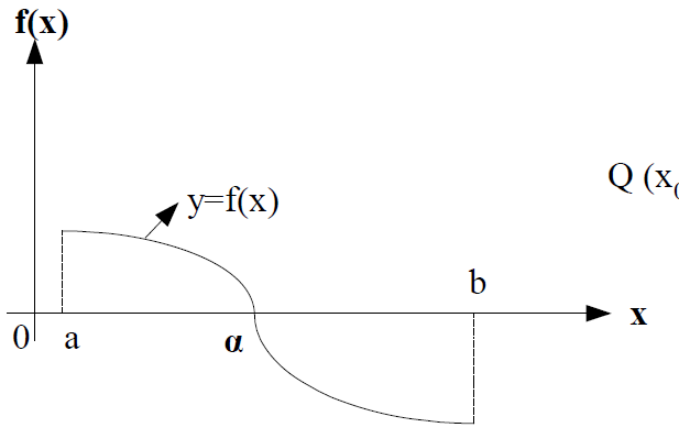
Bu noktada Pozitiften->Negatife geçiş var. O zaman $f(x)$ fonksiyonu bu $x_0=1/3$ noktasında bir maksimuma sahiptir. Diğer $x_0=1$ noktası içinde aynı şeyleri yazarsak bir minumama sahip olduğunu görebiliriz.

Şimdi ikinci türevin direk işaretine bakalım.



Yarılama (İkiye bölme) yöntemi

- ❶ Eğer f , $[a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon ve $f(a)f(b) < 0$ ise, bu durumda f fonksiyonu (a, b) de bir sıfıra sahip olmak zorundadır. $f(a)f(b) < 0$ olduğundan, f fonksiyonu $[a, b]$ de işaret değiştirir ve böylece, aralığın içinde en az bir sıfıra sahiptir. Bu Ortalama-Değer Teoreminin bir sonucudur.
- ❷ Yarılama yöntemi bu sonucu şu şekilde kullanır:
 - ❶ $f(a)f(b) < 0$ ise, bu durumda $c = \frac{1}{2}(a + b)$ yi hesaplayıp, $f(a)f(c) < 0$ olup olmadığını test ederiz. Eğer bu doğru ise, bu durumda f , $[a, c]$ de bir sıfıra sahiptir. Böylece c yi yeniden b olarak adlandırıp, orjinal aralığın yarısı uzunluğunda olan yeni $[a, b]$ aralığı ile tekrar başlarız.
 - ❷ $f(a)f(c) > 0$ ise, bu durumda $f(c)f(b) < 0$ olup, bu kez c yi yeni a olarak alırız.
 - ❸ $f(a)f(c) = 0$ ise, bu durumda $f(c) = 0$ olup, sıfır bulunmuş olur.



Şekil 6

Örnek

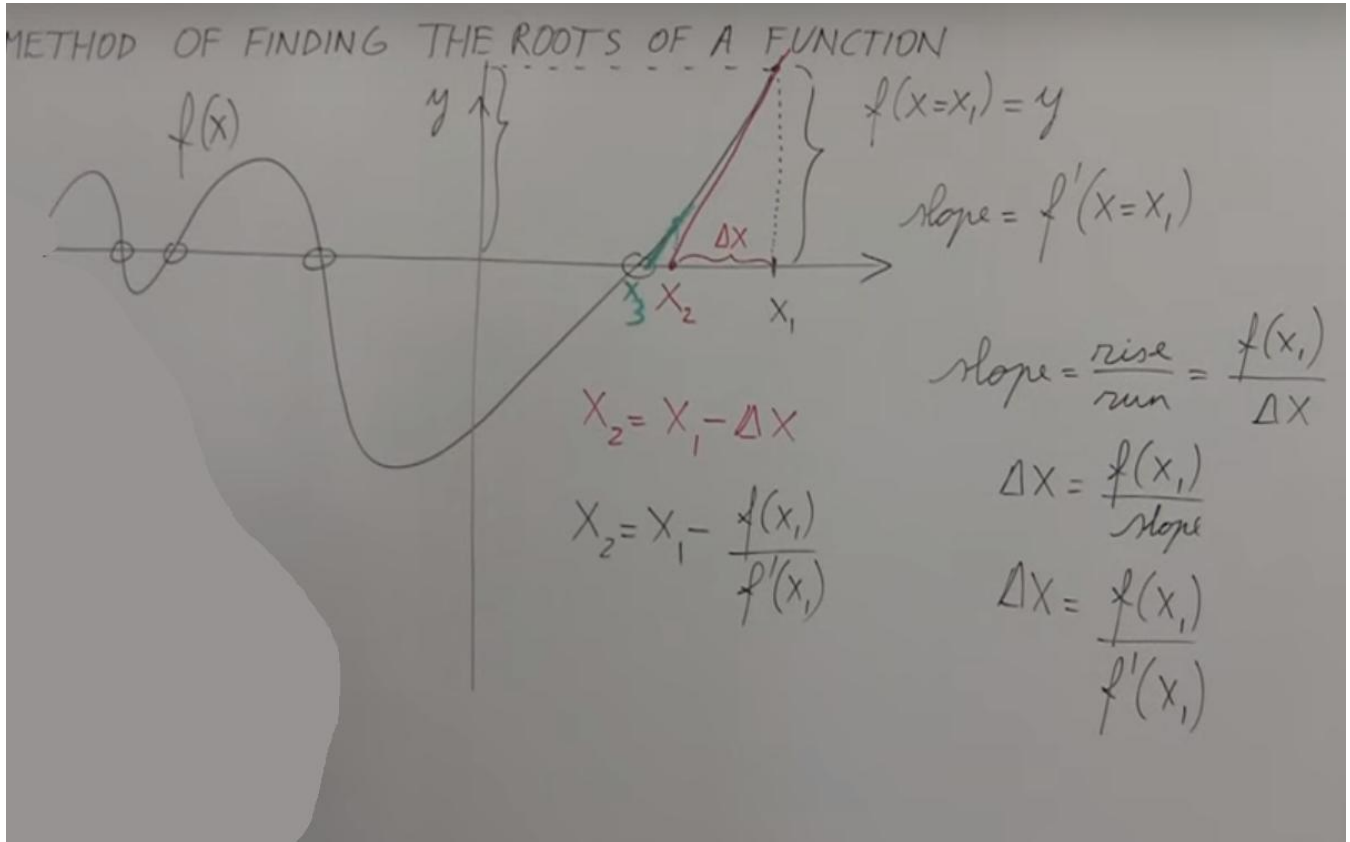
$e^x = \sin x$ denkleminin 0 a en yakın kökünü bulmak için yarılama yöntemini kullanınız.

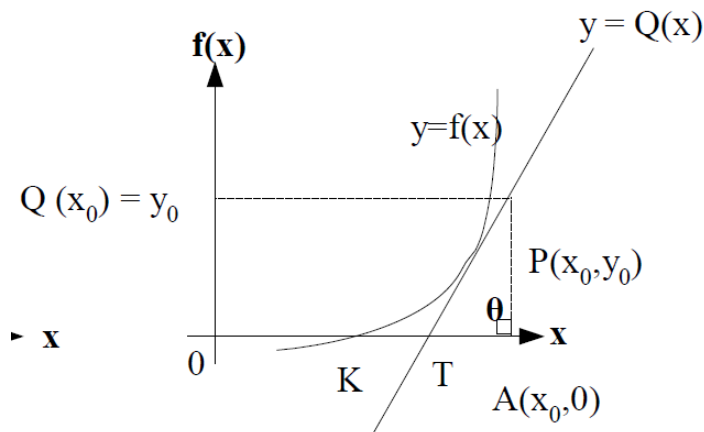
Çözüm

$f(x) = e^x - \sin x$ in bir kökü $[-4, -3]$ aralığındadır. $[-4, -3]$ aralığından başlanırsa, aşağıdaki çıktı üretilir:

k	c	f(c)
1	-3.5000	-3.321
2	-3.2500	-0.694×10^{-1}
3	-3.1250	-0.605×10^{-1}
4	-3.1875	-0.625×10^{-1}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
13	-3.1829	-0.122×10^{-3}
14	-3.1830	-0.193×10^{-4}
15	-3.1831	-0.124×10^{-4}
16	-3.1831	-0.345×10^{-5}

LINEER OLmayan DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ





Şekil 7

Örnek: $f(x) = x^2 - 2x - 2$ fonksiyonunun köklerini bulunuz.

Handwritten solution for finding the root of $f(x) = x^2 - 2x - 2$ using the Newton-Raphson method:

$x^2 - 2x - 2 = 0$ (3)

$f(x) = x^2 - 2x - 2$

$f'(x) = 2x - 2$

x_0	$f(x)$	$f'(x)$	$x_1 = x_0 - \frac{f(x)}{f'(x)}$
3	1	4	$3 - \frac{1}{4} = 2.75$
2.75	0.0625	3.5	$2.75 - \frac{0.0625}{3.5} = 2.732142857$
2.73214	3.18877×10^{-6}	3.464	$x - \frac{A}{B} = 2.73205081$
2.73205081			

Ans = 2.732 to 3 d.p.

