

STATİK (3. Hafta)

TAŞIYICI SİSTEMLER VE MESNET TEPKİLERİ

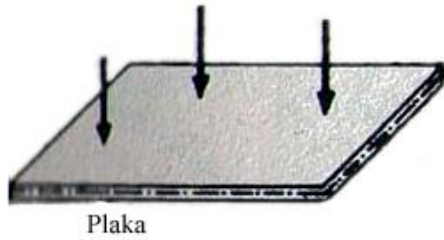
Taşıyıcı Sistemler

Bir yapıya etki eden çeşitli kuvvetleri güvenlik sınırları içinde taşıyan ve bu kuvvetleri zemine aktaran sistemlere taşıyıcı sistemler denir.

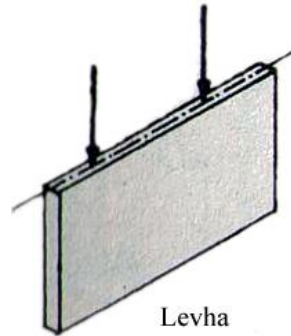
Taşıyıcı sistemler genel olarak üç grupta toplanabilir.

Bir boyutlu sistemler (Çubuk Sistemler): Bu sistemlerde bir boyut izafi olarak büyük diğer iki boyut küçüktür. Bu nedenle gösterimleri eksen şeklinde olur. Eksen çizgisi çubuğun ağırlık merkezinden geçer. Düz doğru yada bir eğri olabilir. Gövde içi dolu yada ortası boş olabilir.

İki boyutlu sistemler (Yüzey sistemler): Bu sistemlerde iki büyük diğer tek boyut izafi olarak daha küçüktür. Şekilleri düz olanların plaka şeklinde, eğri olanları ise kabuk şeklindedir. Gösterimleri et kalınlığının içinden geçen orta yüzeyleri ile olur.



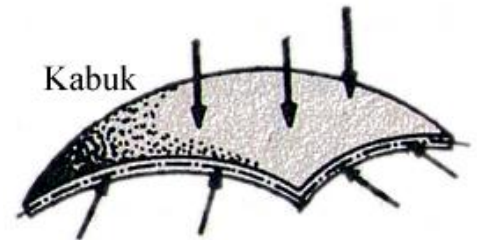
Plaka



Levha



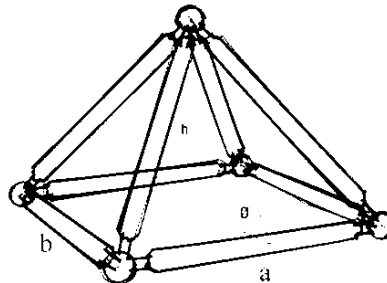
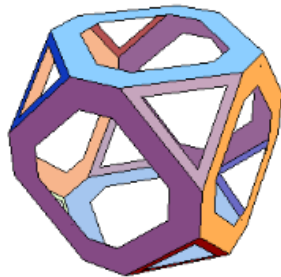
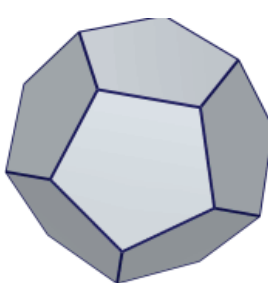
Tek boyutlu çubuk sistemler



Kabuk

Üç boyutlu sistemler (Hacimsel, Uzaysal Sistemler): Üç boyutuda aynı derecede önemli olan sistemlerdir. Uzak kafes sistemleri gibi.

Bu ders kapsamında bir boyutlu içi dolu sistemler incelenecektir.



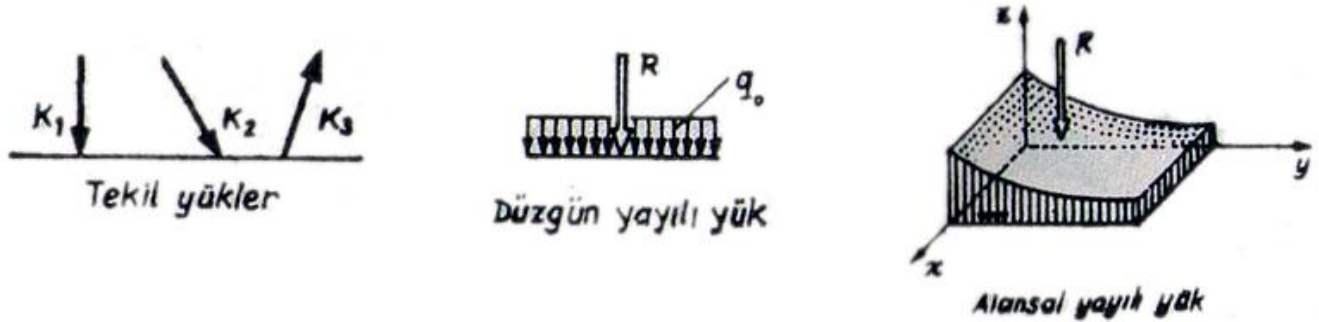
Dış Kuvvetler

Taşıyıcı sisteme etki eden dış kuvvetler

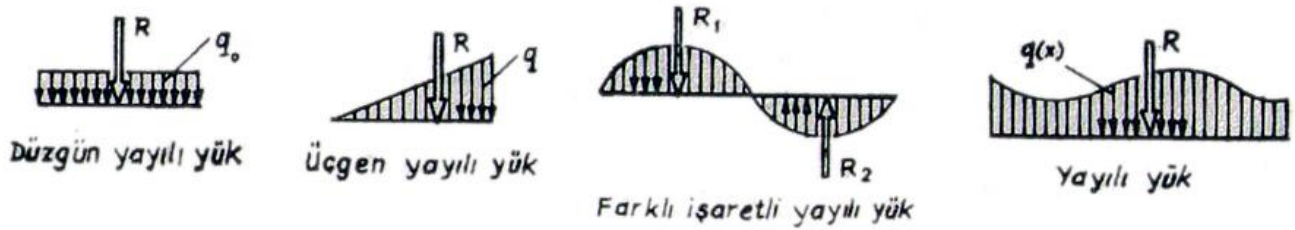
- Etki şekline göre (Tekil yük, Yayıllı yük)
- Bilinme durumuna (Doğrudan bilinen kuvvetler, Mesnet ve bağ kuvvetleri)

Şeklinde gruplandırılabilir..

Tekil yük, Yayılı yük: Tekil yük sistemin üzerinde noktasal olarak etki eden yüküdür. Yayılı yükler doğrusal veya alansal olabilirler. Çubuk şeklindeki bir boyutlu bir taşıyıcı sisteme etki eden yayılı yük doğrusaldır ve birim boya etki eden kuvvet kgf/m , ton/m , N/m şeklinde gösterilir. Alansal yayılı yükler ise iki boyutlu yüzey üzerine etki eden yüklerdir ve birim alana etki eden kuvvet kgf/m^2 , ton/m^2 , N/m^2 şeklinde gösterilir.



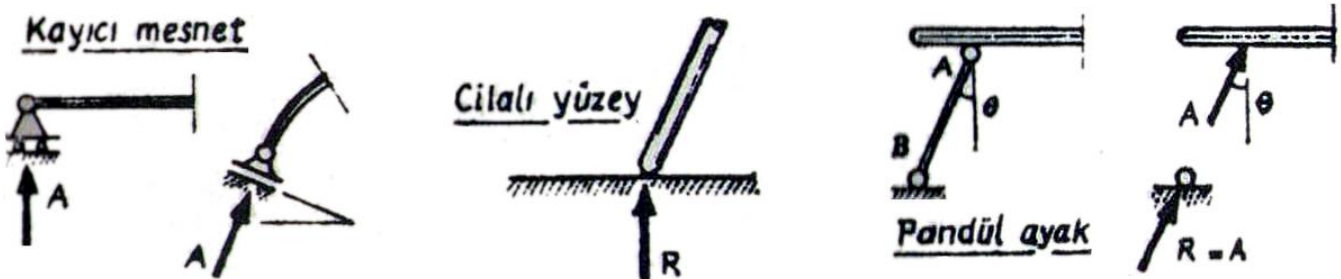
Yayılı yükler bir diyagram ile gösterilir. Yük diyagramının alanı yayılı yükün yerine geçen tekil yükü verir. Denge problemlerinde yayılı yükler yerine eşdeğer tekil yükler alınarak işlem yapılır. Eşdeğer yükün tesir çizgisi, yayılı yük diyagramının ağırlık merkezinden geçer ve yönü yayılı yükün yönü ile aynı olur.



Doğrudan kuvvetler ile Mesnet ve Bağ kuvvetleri: Yapı üzerinde direk olarak bilinen, kendi ağırlığı ile oluşan yada dışarıdan etki eden kuvvetlere doğrudan etki eden kuvvetlerdir. Taşıyıcı sistemin dış ortamla birleştiği noktalara Mesnet denir. Mesnetlerde oluşan kuvvetlere ise Tepki (reaksiyon) kuvvetleri denir. Bunlar doğrudan bilinmezler, hesaplanmaları gerekir. Taşıyıcı sistem parçalara bölündüğü zaman ayrılma noktalarındaki kuvvetlerde bağ kuvvetleridir. Bağ kuvvetleri her iki parçada zıt yönlü ve eşit olarak etki eder.

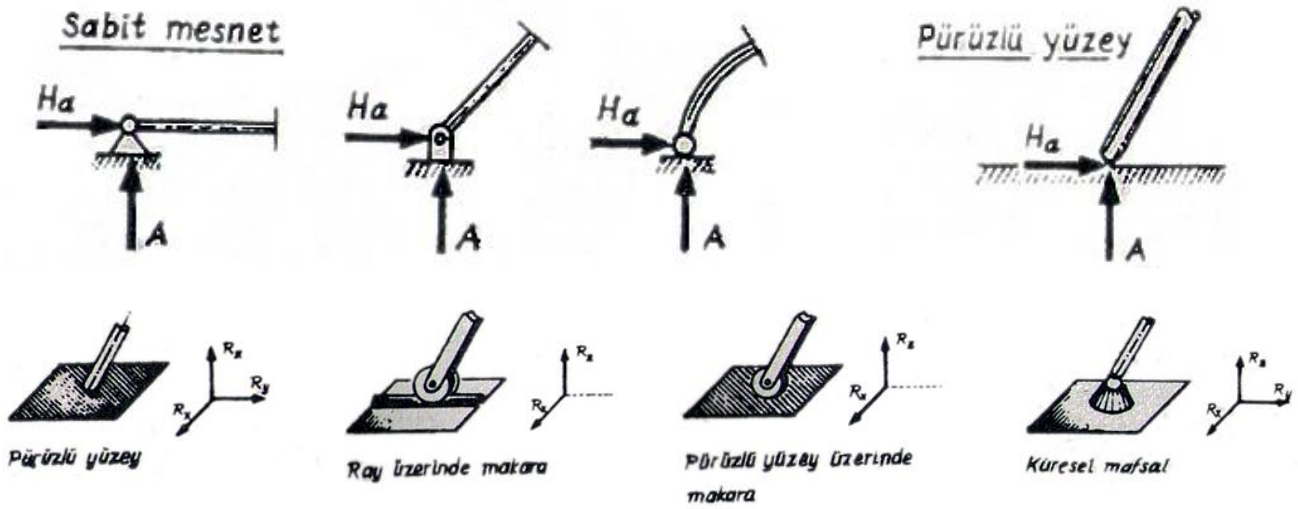
Tepki Kuvvetleri

Tepki doğrultusu bilinen kuvvetler: Bu tür tepki kuvvetleri, cismin yüzey üzerinde serbestçe gezebildiği durumlarda ortaya çıkar. Tepki kuvveti sadece yüzey normali doğrultusunda cismi durdurmaya çalışır. Diğer doğrultularda cisim serbesttir. Cilalı yüzeyler, kayıcı mesnetler, bilyalı uclar, kablolar ve iki ucundan da oynak bir şekilde bağlanmış pandül ayaklar bu tür bir bağ oluşturur.

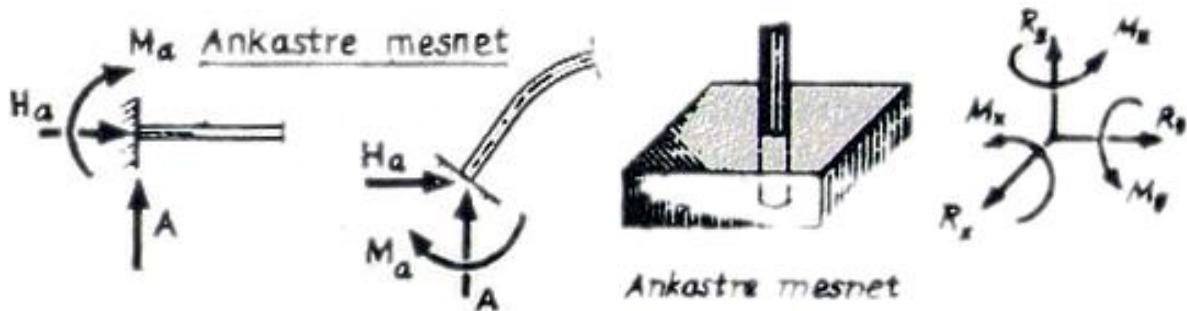




Tepki doğrultusu bilinmeyen ve tepki momenti oluşturmeyen kuvvetler: Bu tür tepki kuvvetleri cismin uç kısmından dönebilecek şekilde sabitlendiği durumlarda ortaya çıkar. Dönebildiği için moment taşımamaktadır fakat eksen doğrultularında hareket edemediği için tepki kuvvetleri oluşmaktadır. Tepki doğrultusu bilinmediği için 2 eksen yada 3 eksen de tepki kuvvetleri bulunmaya çalışılır. Bu tür mesnet yada bağların başlıcaları sabit mesnetler, mafsal ve pürüzlü yüzeylerdir.



Tepki doğrultusu bilinmeyen ve Tepki momenti oluşturanlar: Bu tür tepki kuvvetleri cisim uç kısmından tamamen sabitlendiğinde ortaya çıkar. Eksen doğrultularında hem hareket edemez hemde dönemez. Bu durumda hem tepki kuvvetleri hemde momentleri oluşur.

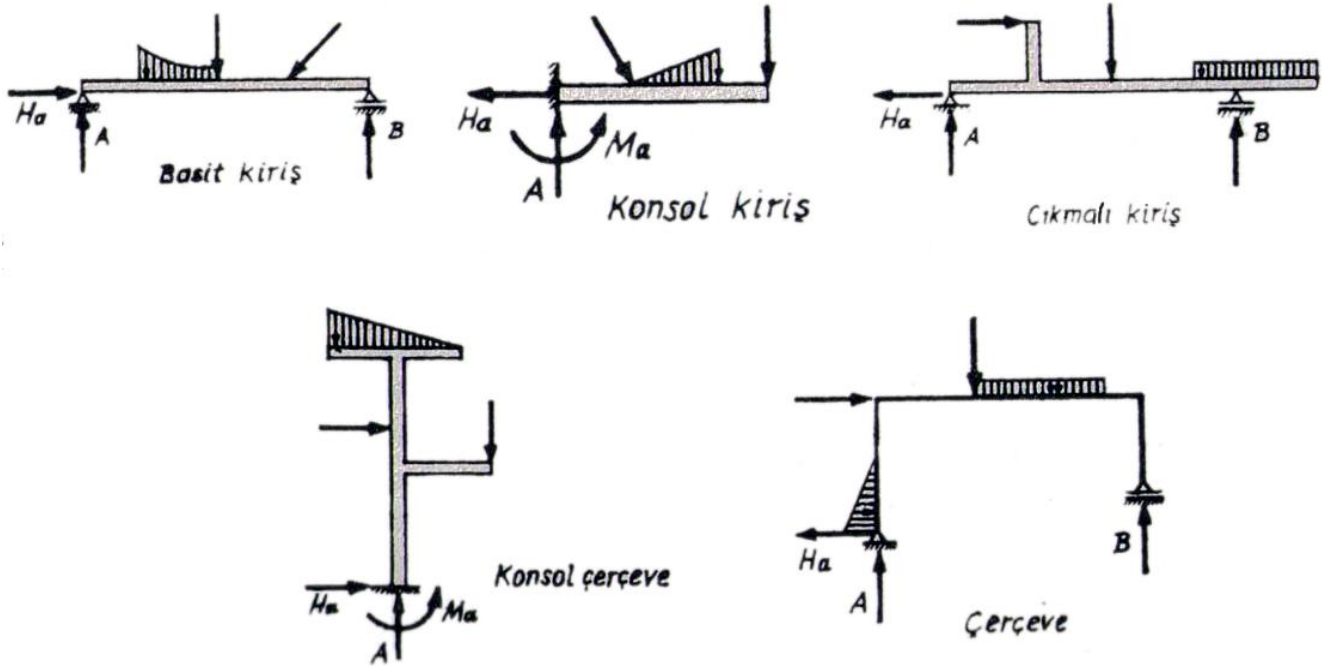


Tepki kuvvetleri ve momentleri başlangıçta tahmini olarak belirlenir. Sonuç pozitif (+) çıkarsa alınan yön doğru demektir. Negatif (-) çıkarsa gerçekte yönü ters demektir.

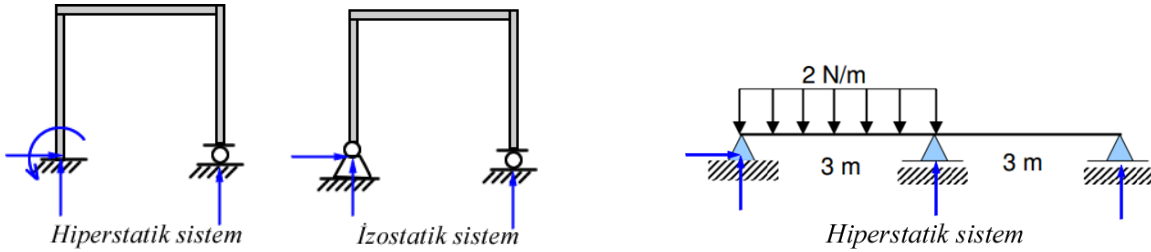
İzostatik ve Hiperstatik Taşıyıcı Sistemler ve Mesnet Tepkileri

Mesnet tepkilerinin hesabı için denge denklemleri yeterli olan sistemlere izostatik sistemler denir. Denge denklemlerinin sayısı üçtür. Buna göre mesnet tepkileride 3 ve 3den az olan sistemler izostatik (statikçe belirli) sistemlerdir. Denge denklemlerinden fazla başka bağıntılara da ihtiyaç duyuluyorsa bu sistemlere hiperstatik sistemler denir. Bunların mesnet tepkileri üçden fazla çıkar. Üçden fazla olan denklem sayısı yada mesnet tepkisi sayısı hiperstatiklik mertebesi gösterir. Bir sistemin tüm kesit tesirlerini (iç kuvvetlerini) ve mesnet reaksiyonları denge denklemleri yardımıyla hesaplanamıyorsa sistem hiperstatiktir.

İzostatik sistemlere örnek olarak basit kiriş, çıkmalı kiriş, konsol kiriş, izostatik çerçeveler örnek verilebilir. Bu sistemlerin mesnet tepkilerini bulmak için denge denklemleri yeterlidir. Aşağıda izostatik sisteme ait örnekler verilmiştir.

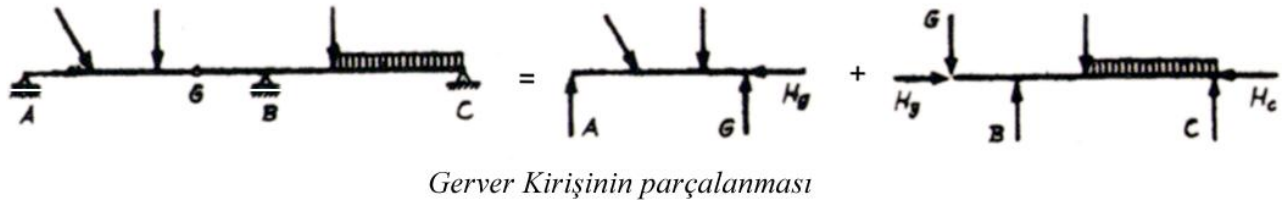
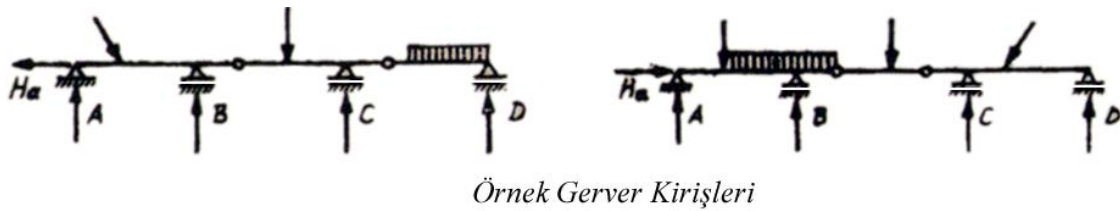


Aşağıdakiler ise hiperstatik sistemlerdir. Tepki kuvvetleri 3 den fazladır.



Gerber Krişleri

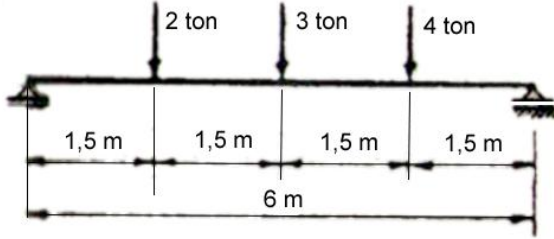
İkiden fazla mesneti bulunan krişlere gerber krişleri adı verilir. Böyle bir sürekli krişin mesnet tepkilerinin sayısı 3 den fazla olduğundan sistem hiperstatik tir. Bu sistemi izostatik hale getirmek için hiperstatiklik mertebesi kadar ara mafsal ile bölerek sistemi parçalı olarak çözmek gerekir.



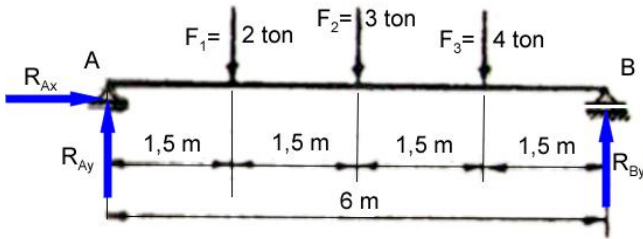
ÇÖZÜMLÜ PROBLEMLER

Örnek 1

Şekildeki yükleri ve geometrik ölçüleri verilen basit kirişin mesnet tepkilerini bulunuz.



Çözüm:



$$(\rightarrow +) \Sigma F_x = 0 \quad R_{Ax} = 0$$

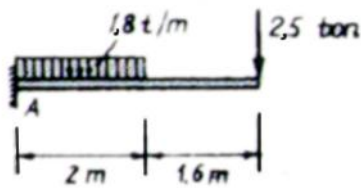
$$(\uparrow +) \Sigma F_y = 0 \quad R_{Ay} + R_{By} - 2t - 3t - 4t = 0 \Rightarrow R_{Ay} + R_{By} = 9 \text{ ton}$$

$$(\curvearrowright +) \Sigma M_x = 0 \quad 2t \cdot 1,5m + 3t \cdot 3m + 4t \cdot 4,5m - R_{By} \cdot 6m = 0 \Rightarrow R_{By} = 5 \text{ ton}$$

$$R_{Ay} + R_{By} = 9 \text{ ton} \Rightarrow R_{Ay} + 5t = 9t \Rightarrow R_{Ay} = 4t$$

Örnek 2

Şekildeki konsol kirişin mesnet tepkilerini hesaplayınız.



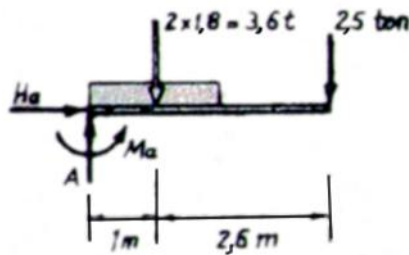
Serbest cisim diyagramı yani konsol kirişe etki eden kuvvetler ve ankastre mesnet türüne ait tepkiler şekilde gösterilmiştir. Denge denklemleri yazılırsa :

$$\Sigma X = 0 \left(\begin{smallmatrix} + \\ \rightarrow \end{smallmatrix} \right) H_a = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma Y = 0 \left(\begin{smallmatrix} + \\ \uparrow \end{smallmatrix} \right) A - 2 \times 1,8 - 2,5 = 0 \\ A = 6,1 \text{ ton} \quad (2)$$

$$\Sigma M_A = 0 \quad -M_a + 1 \times (2 \times 1,8) + 3,6 \times 2,5 = 0 \\ M_a = 3,6 + 9,0 = 12,6 \text{ tm} \quad (3)$$

bulunur.



Örnek 3

Prob. Şekildeki konsol kirişin mesnet tepkilerini bulunuz.

ÇÖZÜM:

Serbest cisim diyagramı şekilde verilmiştir. Denge denklemleri yazılırsa :

$$\Sigma X = 0 \rightarrow H_a + 8 \cos 45^\circ = 0$$

$$H_a = -5,65 \text{ ton} \quad (1)$$

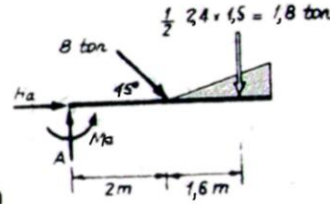
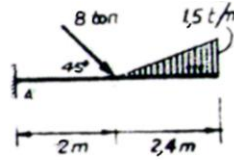
$$\Sigma Y = 0 (\uparrow +) \quad A - 8 \sin 45^\circ - \frac{1}{2} \times 2,4 \times 1,5 = 0$$

$$A - 5,65 - 1,80 = 0$$

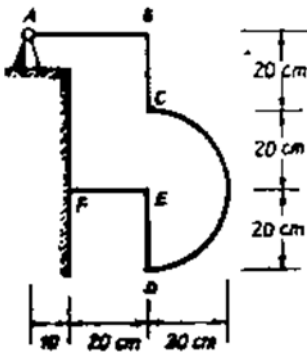
$$A = 7,45 \text{ ton} \quad (2)$$

$$\Sigma M = 0 \quad -M_a + 2 \times 8 \sin 45^\circ + 3,6 \times \left(\frac{1}{2} \times 2,4 \times 1,5 \right) = 0$$

$$M_a = 11,30 + 6,48 = 17,78 \text{ tm} \quad (3)$$



Örnek 4



Prob. 3.19. Şekildeki $ABCDEF$ çubuğunun metresi 60 kg. ağırlığındadır. Bu çubuk A da mafsallı olarak, F 'de cıralı bir yüzeye dayanarak mesnetlenmiştir. A ve F 'deki tepki kuvvetlerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM:

Önce çubuğun ağırlık merkezini bulmak gerekir.

CD yarım çemberi için :

$$L_3 = \pi r$$

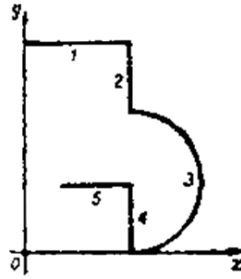
$$L_3 = 3,14 \times 20 = 62,8 \text{ cm}$$

$$x_3 = 30 + \frac{2r}{\pi}$$

$$x_3 = 30 + \frac{2 \times 20}{3,14} = 42,75 \text{ cm}$$

Çubuğu oluşturan diğer parçaların ağırlık merkezleri belli olduğundan, ağırlık merkezleri bölümünde görüldüğü şekilde aşağıdaki tablo

No	L_i	x_i	$L_i x_i$
1	30	15	450
2	20	30	600
3	62,8	42,75	2685
4	20	30	600
5	20	20	400
	152,8		4735



Tablodan :

$$x_G = \frac{4735}{152,8} = 30,9 \text{ cm} \quad (1)$$

bulunur. Çubuğun ağırlığı :

$$W = 1,528 \times 60 = 91,7 \text{ Kg.}$$

Denge denklemlerinden :

$$\Sigma Y = 0 \quad A - 91,7 = 0 \rightarrow A = 91,7 \text{ kg} \quad (2)$$

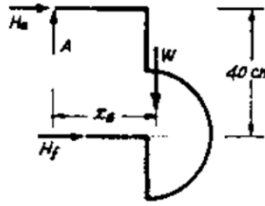
$$\Sigma M_A = 0 \quad 31 \times 91,7 - 40 \times H_f = 0$$

$$H_f = 71,1 \text{ kg} \quad (3)$$

$$\Sigma X = 0 \quad H_s + H_f = 0$$

$$H_s = -71,1 \text{ kg} \quad (4)$$

elde edilir.



Örnek 5

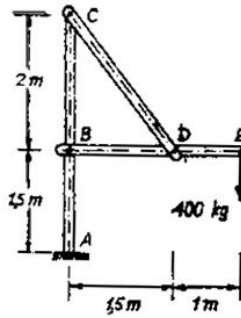
Prob. Şekildeki sistemin mesnet tepkileri ile bağ kuvvetlerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM:

Sistemin bütününe ve sistemi oluşturan çubuklara ait serbest cisim diyagramları şekillerde gösterilmiştir.

Sistemin bütününe dengeden,

$$\Sigma X = 0 \quad H_s = 0 \quad (1)$$

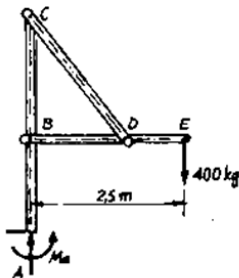


$$\Sigma Y = 0 \quad A - 400 = 0$$

$$A = 400 \text{ kg} \quad (2)$$

$$\Sigma M_A = 0 \quad M_s - 2,5 \times 400 = 0$$

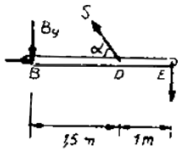
$$M_s = 1000 \text{ kgm} \quad (3)$$



bulunur.

BE kirişinin dengeden ise :

$$\Sigma M_B = 0 \quad -(1,5 \times \sin \alpha) \times S + 2,5 \times 400 = 0$$



$$S = \frac{1000}{1,2} = 833 \text{ kg} \quad (4)$$

$$\Sigma X = 0 (\rightarrow) \rightarrow B_x - S \cos \alpha = 0$$

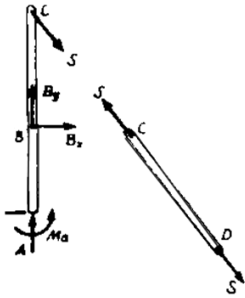
$$B_x = -500 \text{ kg} \quad (5)$$

$$\Sigma Y = 0 (\uparrow) \rightarrow B_y + S \sin \alpha - 400 = 0$$

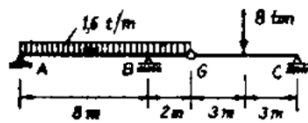
$$B_y = 833 \times 0,8 - 400 = 266 \text{ kg} \quad (6)$$

elde edilir.

Yukarda bulunan A , H_x ve M_x kuvvetlerinin AC çubuğuna ait serbest cisim diyagramından da elde edilebileceği açıktır.

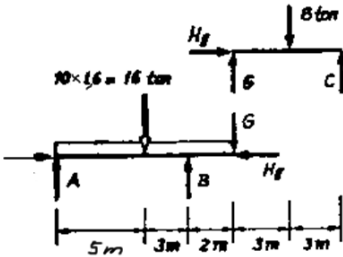


Örnek 6



Prob. Şekildeki Gerber kirişinin mesnetlerinde oluşan tepki kuvvetlerini hesaplayınız.

Sistem G mafsalından iki kısma ayrılabilir. Böylece bir basit bir de çukmalı kiriş elde edilir ve problem bu kirişlerin mesnet tepkilerinin bulunmasına indirgenmiş olur.



GC kirişi :
Simetriden

$$G = C = 4 \text{ ton} \quad (1)$$

yatay yük olmadığından

$$H_x = 0 \quad (2)$$

ABG kirişi :

$$\text{Yatay yük olmadığından } H_x = 0 \quad (3)$$

$$\Sigma Y = 0 (\uparrow) \rightarrow A + B - (8+2) \times 1,6 - 4 = 0$$

$$A + B = 20,0 \text{ ton} \quad (4)$$

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow 5 \times (8+2) \times 1,6 + 10 \times G - 8 \times B = 0$$

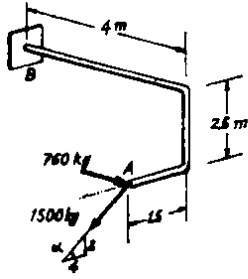
$$G = 4 \text{ ton} \rightarrow B = 15,0 \text{ ton} \quad (5)$$

$$(4) \text{ ve } (5) \rightarrow A = 20,0 - 15,0 = 5,0 \text{ ton} \quad (6)$$

bulunur.

Yukarıdaki düşünüş şekli yerine üç denge denklemi ve bir $M_G = 0$ şartı yazılarak elde edecek dört denklemden aynı sonuçların bulunabileceği açıktır.

Örnek 7



Prob. 3.32. Şekildeki uzay konsol kirişin mesnet tepkilerini hesaplayınız.

Mesnet türüne göre oluşan tepkileri ve verilen kuvvetleri gösteren serbest cisim diyagramı ayrıca çizilmiştir.

Denge denklemleri yazılırsa,

$$\Sigma X=0 \quad B_x + 750 = 0 \rightarrow B_x = -750 \text{ kg} \quad (1)$$

$$\Sigma Y=0 \quad B_y - 1500 \times \cos \alpha = 0$$

$$\cos \alpha = 0,8 \rightarrow B_y = 1200 \text{ kg} \quad (2)$$

$$\Sigma Z=0 \quad B_z - 1500 \times \sin \alpha = 0$$

$$\sin \alpha = 0,6 \rightarrow B_z = 900 \text{ kg} \quad (3)$$

$$\Sigma M_x=0 \quad M_{bx} + 1500 \times \sin \alpha \times 1,5 - 1500 \cdot \cos \alpha \times 2,5$$

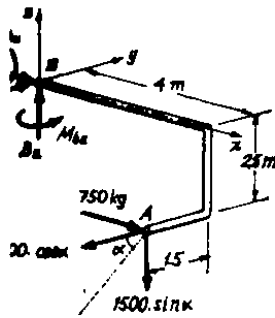
$$M_{bx} = 1650 \text{ kgm.} \quad (4)$$

$$\Sigma M_y=0 \quad M_{by} + 1500 \times \sin \alpha \times 4,0 - 750 \times 2,5 = 0$$

$$M_{by} = -1725 \text{ kgm.} \quad (5)$$

$$\Sigma M_z=0 \quad M_{bz} + 750 \times 1,5 - 1500 \times \cos \alpha \times 4,0 = 0$$

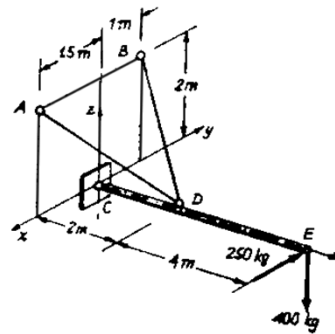
$$M_{bz} = 3675 \text{ kgm.}$$



Örnek 8

Prob. Şekildeki sistemde AD ve BD kablolarında oluşan kuvvetlerle, C küresel mafsalında oluşan tepki kuvvetlerini hesaplayınız.

Küresel mafsalda oluşabilecek tepkilerle, kablo kuvvetlerini ve verilen kuvvetleri gösteren serbest cisim diyagramı ayrıca çizilmiştir. Denge denklemleri için kabloların eksenlerle yaptıkları açıların sin. ve cos. lerine ihtiyaç vardır.



$$A'D = \sqrt{1,5^2 + 2,0^2} = 2,5 \text{ m}$$

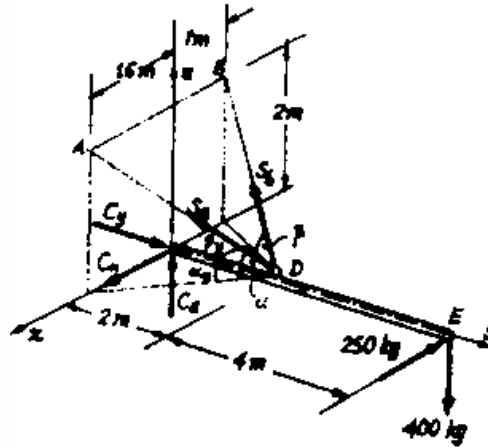
$$\sin \alpha_y = \frac{1,5}{2,5} = 0,6$$

$$\cos \alpha_y = \frac{2,0}{2,5} = 0,8$$

$$AD = \sqrt{2^2 + 2,5^2} = 3,21 \text{ m}$$

$$\sin \alpha = \frac{2,0}{3,21} = 0,623$$

$$\cos \alpha = \frac{2,5}{3,21} = 0,780$$



$$B'D = \sqrt{1^2 + 2^2} = 2,24 \text{ m}$$

$$\sin \beta_y = \frac{1,0}{2,24} = 0,446$$

$$\cos \beta_y = \frac{2,0}{2,24} = 0,892$$

$$BD = \sqrt{2,24^2 + 2^2} = 3,0 \text{ m}$$

$$\sin \beta = \frac{2,0}{3,0} = 0,667$$

$$\cos \beta = \frac{2,24}{3,00} = 0,746$$

Denge denklemlerinden,

$$\begin{aligned} \Sigma X = 0 \quad & S_a \cos \alpha \cdot \sin \alpha_y - S_b \cos \beta \cdot \sin \beta_y \\ & + C_x - 250 = 0 \\ & 0,468 S_a - 0,333 S_b + C_x = 250 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \Sigma Y = 0 \quad & -S_a \cos \alpha \cdot \cos \alpha_y - S_b \cos \beta \cdot \cos \beta_y + \\ & + C_y = 0 \\ & 0,624 S_a + 0,665 S_b = C_y \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \Sigma Z = 0 \quad & S_a \sin \alpha + S_b \sin \beta + C_z - 400 = 0 \\ & 0,623 S_a + 0,667 S_b + C_z = 400 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_{C_x} = 0 \quad & 2,0 \times (S_a \sin \alpha + S_b \sin \beta) - 6 \times 400 = 0 \\ & 0,623 S_a + 0,667 S_b = 1200 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_{C_z} = 0 \quad & 6 \times 250 + 2 \times S_b \cos \beta \cdot \sin \beta_y \\ & - 2 \times S_a \cos \alpha \cdot \sin \alpha_y = 0 \\ & 0,468 S_a - 0,333 S_b = 750 \end{aligned} \quad (5)$$

$$(4) \text{ ve } (5) \text{ den : } S_a = 1730 \text{ kg} \quad (6)$$

$$S_b = 180 \text{ kg} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} (1), (6) \text{ ve } (7) \rightarrow C_x = & -0,468 \times 1730 + \\ & + 0,333 \times 180 + 250 \end{aligned}$$

$$C_x = -500 \text{ kg} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} (2), (6) \text{ ve } (7) \rightarrow C_y = & 0,624 \times 1730 + 0,665 \times 180 \\ C_y \cong & 1200 \text{ kg} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} (3), (6) \text{ ve } (7) \rightarrow C_z = & 400 - 0,623 \times 1730 - \\ & - 0,667 \times 180 \\ C_z = & -800 \text{ kg} \end{aligned} \quad (10)$$