

STATİK (4. Hafta)

KAFES SİSTEMLER

Düz eksenden oluşan çubukların birbiriyle birleştirilmesiyle elde edilen sistemlere **kafes sistemler** denir. Çubukların birleştiği noktalara **düğüm** noktaları adı verilir. Dış çevreye bağlandığı mesnet noktalarında bir tür düğümdür.

Sınıflandırılması

Kafes sistemleri;

- a) Düzlem sistem
- b) Uzay sistem

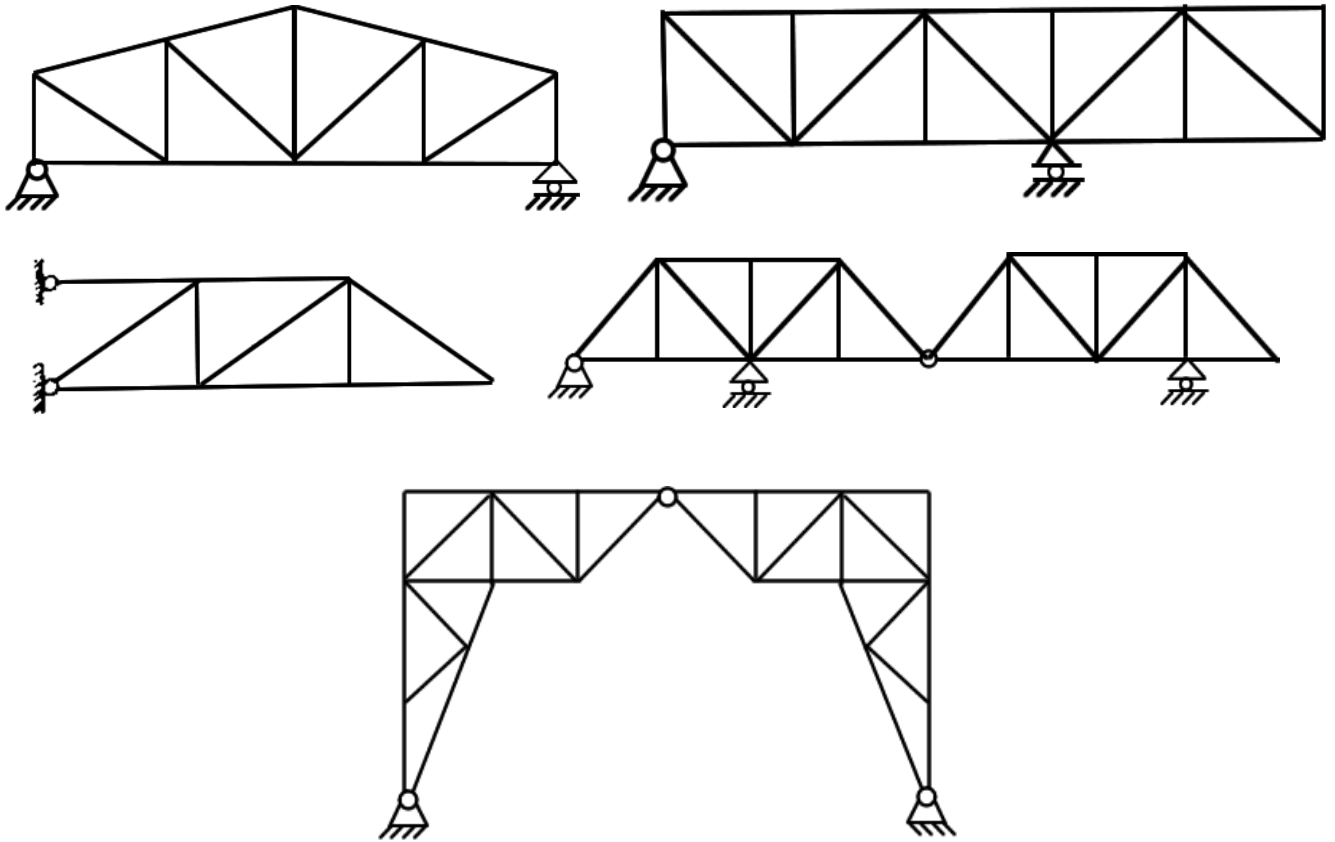
şeklinde iki gruba ayırabiliriz. Bunları da kendi içinde teşkil tarzlarına göre

- a) Basit sistemler,
- b) Bileşik sistemler
- c) Karışık sistemler

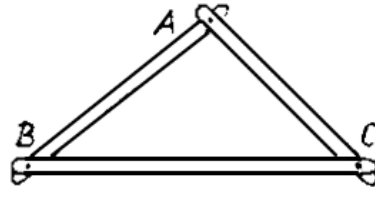
olarak ayırabiliriz. Statik konusuna giren kafes sistemler mesnet ve çubuk kuvvetleri yönünden İzostatik (3 denge denklemiyle çözülebilen) sistemlerdir.

a) Düzlem Kafes Sistemler

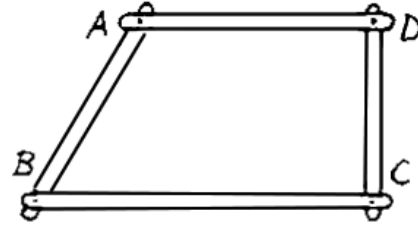
2 boyutta teşkil edilmiş sistemlerdir. Bütün çubukları düğüm noktaları ve yükleri aynı düzlem üzerinde bulunur. Düzlem kafes sistemler, basit kafes kiriş, çıkmalı kafes kiriş, konsol kafes kiriş, kafes çerçeve, üç mafsallı çerçeve, kemer kiriş veya Gerber kafes kiriş şeklinde olabilir.



Uçlarından mafsallı olarak birleştirilen üç çubuk en basit bir düzlem kafes sistemidir ve temel üçgen adını alır.. Bu sistemin serbestlik derecesi sıfırdır. Yüke bindiği zaman kendiliğinden hareket etmez. Buna mukabil dört çubuktan oluşan bir sistem taşıyıcı bir sistem olamaz. Çünkü çubuklar mafsallı olarak birleştirildiğinde, etkiyen kuvvetler sistemin dengesini bozup yıkılmasına sebep olur. Dörtgen sistemin taşıyıcı olması için karşılıklı köşelerden birine bir çapraz atılması gerekir.

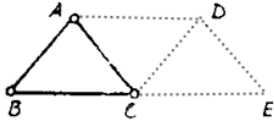


Taşıyıcı olabilir



Taşıyıcı olamaz

Temel üçgenler yanyana eklenerek daha büyük kafes sistemler elde edilir. Bu şekilde oluşturulan sistemlere **Basit Kafes Sistemler** adı verilir. Örneğin "Howe" sistemi ile tanınan ve tipik bir çatı makası olarak kullanılan sistem basit kafes sistemidir. Ayrıca farklı bir tasarım olan "Baltimore" tipi kafes sistemi de vardır.



"Temel üçgen" den üretilen bir basit kafes sistem



Howe Tipi

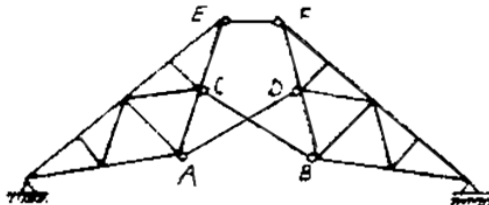


Baltimore Tipi

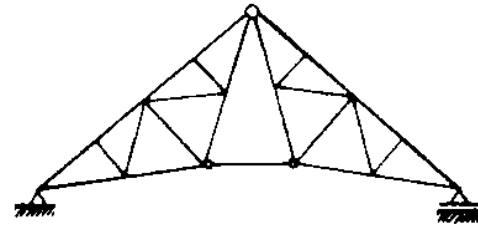
Kafes sistemlerde düğüm noktaları sayısı (mesnetler dahil) d, çubuk sayısı s ile gösterilmek üzere aşağıdaki bağıntı kullanılabilir. Bu bağıntı kafes sistemler için gerekli fakat yeterli değildir. Örneğin yukarıda Howe tipi kafesde düğüm sayısı d=12 dir. Çubuk sayısı ise 21 dir. Buna göre $2.12=21+3=24$ olur. Denklemi sağladı.

$$2.d = s + 3$$

İki Basit kafes sistem karşılıklı karşılıklı olarak birleştirilirse **Bileşik Kafes Sistemi** elde edilir. Bağlantı en az ya bir noktada kesişmeyen üç çubukla yada bir mafsal ve bir çubukla birleştirilmiş olmalıdır. $2.d = s + 3$ bağıntısı bileşik kafes sistemleri için de geçerlidir. Örneğin aşağıdaki ilk bileşik kafesini sayalım. Düğüm sayısı d=16, çubuk sayısı s=29. Buna göre $2.16=29+3=32$ olur. İkincisi d=15, s=27 ise, $2.15=27+3=30$ olur.

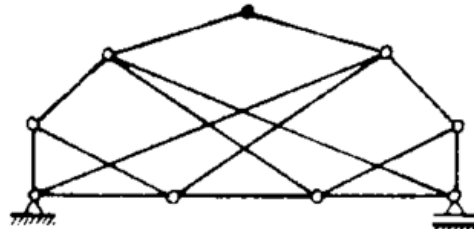


Bileşik kafes sistem



Bileşik kafes sistem

Basit ve bileşik kafes sistemlerin dışında kalan sistemlere **Karışık Kafes Sistemler** denir. Bunlarda kurala uyar. Aşağıdaki kafes sistemine uygulayalım. Düğüm sayısı d=9, çubuk sayısı s=15, $2.9=15+3=18$ olur.



Karışık kafes sistem

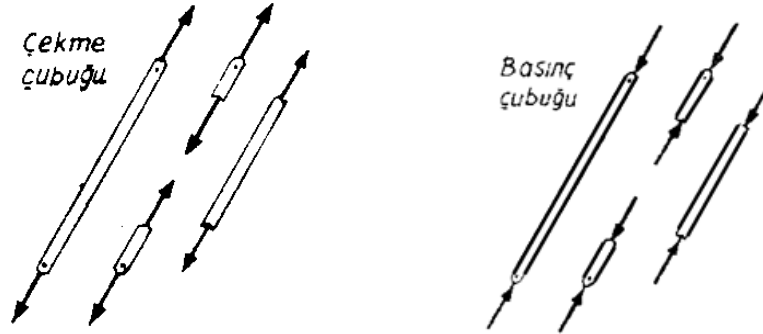
Düzlem Kafes Sistemlerin Hesabı

Düzlem sistemler için yapılan kabuller şunlardır.

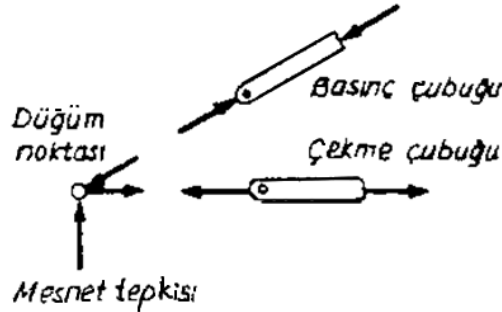
1. Bütün çubuklar aynı düzlemedir.
2. Dış kuvvetler çubukların düzlemi içindedir ve sadece düğüm noktalarına etki eder.
3. Çubuklar boylarını değiştirmezler
4. Çubuklar birbirlerine düğüm noktalarından sürmesiz bir mafsalla bağlanmışlardır.

Basitleştirici bu kabuller nedeniyle kafes sistemin çubukları sadece normal kuvvet yani eksenel kuvvet etkisindedir. Eksenel kuvvetler ise çekme veya basma türünde olabilir.

Kafes sistemlerin hesabında önce mesnet tepkileri belirlenir. Mesnet tepkileri kafes sistemin tamamının dengesini ifade eden denklemlerle bulunur.



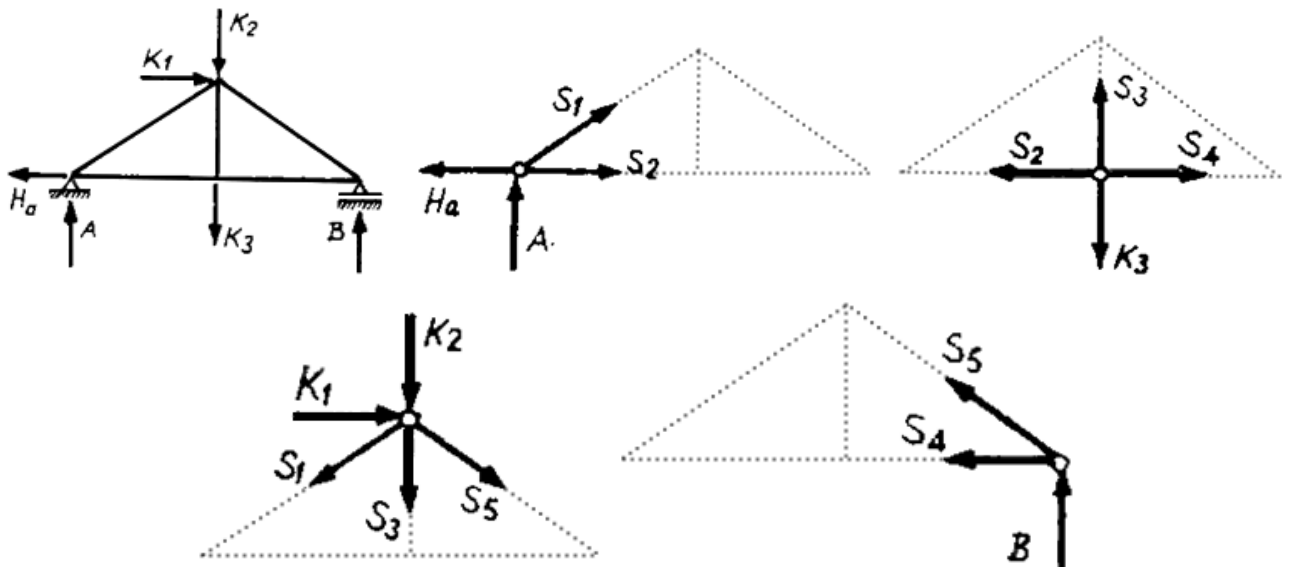
Düzlem kafes sistemlerin çubuk kuvvetlerinin hesabı, bir noktada kesişen düzlem kuvvetlerin dengesi olarak düşünülebilir. Yazılabilecek denge denklemi sayısı yada ona eşit olan bilinmeyen sayısı, düğüm sayısının iki katı ($2.d$) veya çubuk sayısı ile mesnet tepkileri sayısının toplamı kadardır. Yukarıda verilen formülde bunu ifade etmektedir ($2.d = s + 3$).



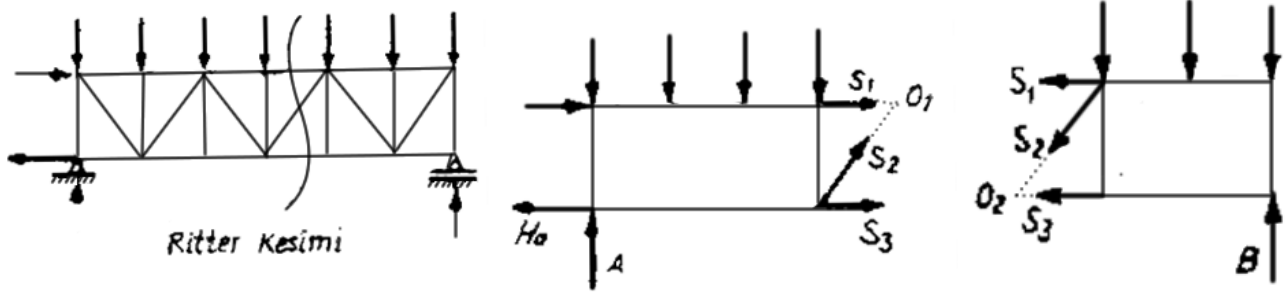
Çubuk kuvvetleri analitik olarak iki yöntemle bulunabilir.

- Düğüm noktaları yöntemi
- Kesim yöntemi

Düğüm noktaları yönteminde, mesnet tepkileri bulunduktan sonra, iki çubuklu düğümden işe başlanır. Bir noktada kesişen düzlem kuvvetlere ait iki denge denkleminde bilinmeyen iki çubuk kuvveti hesaplanır. Hesaplanan değerler komşu düğüm noktalarına iletilir. Bu değerler o düğümler için bilinen değerler olur. Aynı işlem ardışık olarak bilinmeyen diğer düğümlere uygulanarak bütün çubuk kuvvetleri bulunur. Çubuk kuvvetlerinin yönü başlangıçta daima çekme yönünde seçilebilir. Sonucun işareti (+) çıkarsa alınan yönün doğru yani çekme olduğu, negatif (-) çıkarsa tersi olması gerektiği yani basma olduğu anlaşılır. Sonuçta çubuk kuvvetleri bir tablo halinde gösterilebilir.



Kesim Yönteminde, (Ritter kesim yöntemi) kafes sistemin bütün çubuk kuvvetleri değilde ara kısımdaki bir kaç çubuğun hesabı söz konusu olduğunda kullanılır. Aynı zamanda bileşik kafes sistemlerin hesabında da kullanılır. Kafes sistemi hesaplanması istenen çubuklardan üçü kesilerek iki parçaya ayrılır. Herbir parçaya ait serbest cisim diyağramı çizilir. Parçalardan birine, özellikle daha az sayıda kuvvet etkisi altında olana ait denge denklemleri yazılarak aranan çubuk kuvvetleri bulunur. Denge denklemlerini yazarken moment denklemlerini bilinmeyen kuvvetlerin kesişme noktalarına göre yazmak o kuvvetleri safdişi yapacağından bilinmeyen sayısını azaltır ve işlemleri kolaylaştırır.



b) Uzak Kafes Sistemler

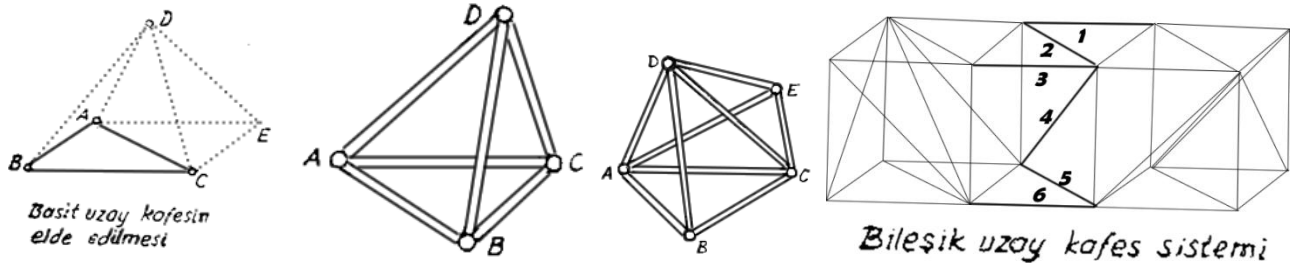
Üç boyutlu ortamda düz eksenli çubukların bir uzay taşıyıcı sistem oluşturacak şekilde uçlarından mafsallı olarak birleştirilmesiyle elde edilen sisteme **Uzak Kafes Sistem** adı verilir. Uzak kafesler basit, bileşik, veya karışık şekillerde teşkil edilebilir.

Düzlem kafeslerin temelini teşkil eden “temel üçgen” elemana dışında bulunan bir noktadan üç çubukla bağlantı kurulursa uzay kafes sistemin “temel sistem” i elde edilmiş olur. Bu temel elemana bağlanan yeni bir düğüm noktası ve bağlantı çubuklarıyla daha büyük uzay kafes sistemler oluşturulur.

İki basit uzay kafes 6 çubukla birbirine bağlanırsa bir **bileşik uzay kafes sistemi** elde edilir. Basit ve bileşik olamayan uzay kafes sistemlerde **karışık sistemler** olarak adlandırılır.

Uzak kafes sisteminde düğüm (d) ile çubuk sayıları (s) arasında aşağıdaki bağıntı vardır.

$$3.d = s + 6$$



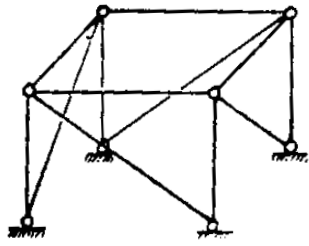
Uzak Kafes Sistemlerin Hesabı

Bu sistemlerin düğüm noktalarındaki hesaplar, aynı noktada kesişen uzay kuvvetlerin (3 eksen) statigidir. Böylece her düğüm için yazılabilecek denge denklemleri sayısı 3 tür. Bilinmeyen sayısı ise çubuk sayısı ile mesnet tepkileri sayısının toplamına eşittir.

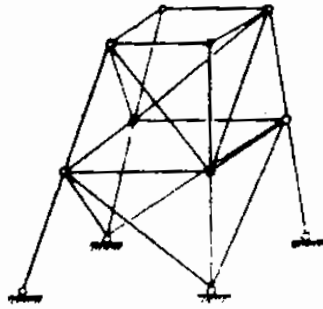
$$3d = s + 6$$

Düğüm noktalarından başka kesim veya ayırma yöntemide kullanılır.

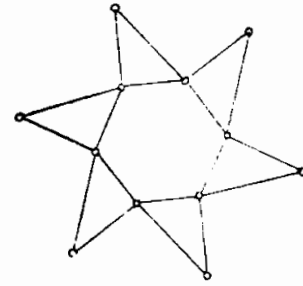
Yere bağlı kendi kendine taşıyıcı olabilen bileşik bir uzay kafes sistemi en az altı çubukla yere bağlanarak elde edilir.



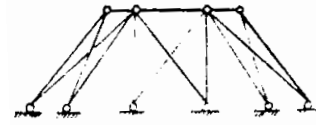
Yere bağlı olmak şartıyla taşıyıcı olabilen uzay kafes sistem



Yere bağ. dört . zdg . sistem



Plan



Görünüş

Yere bağ. dört . zdg . sistem

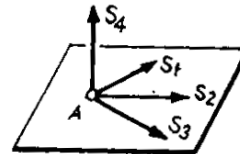
Çubuk kuvvetlerin hesabında düzlem çubuklarda olduğu gibi aynı yöntemler kullanılır. Bazı özel durumlar uzay kafes sistemlerin hesabında işlemleri kısaltır.

- Uzay kafes sistemin üç çubuklu bir düğüm noktasında dış yük yoksa çubuk kuvvetleri sıfır olur.
- Bir noktada kesişen uzay kuvvetlerden bir dışında diğer üçü aynı düzlemde ise, denge için düzlem dışındaki kuvvetin sıfır olması gerekir.
- Çubukları aynı düzlemde bulunmayan üç çubuklu bir düğüm noktasındaki dış kuvvet, çubuklardan biri ile aynı doğrultuda ise diğer iki çubuk kuvveti sıfırdır.



Üç çubuklu uzay kafes düğümünde dış yük yoksa

$$S_1 = S_2 = S_3 = 0$$



(4) çubuğu (1), (2) ve (3) ün düzlemi dışında ise denge için

$$S_4 = 0$$

olmalıdır.

Serbest cisim diyagramına denge denklemleri uygulanırsa

$$\Sigma X = 0 \quad (+) \quad H_A = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma Y = 0 \quad (\uparrow +) \quad A + B - 5 - 3 = 0$$

$$A + B = 8 \quad (2)$$

$$\Sigma M_A = 0 \quad 4,0 \times 5 + 8,0 \times 3 - 4,0 \times B = 0$$

$$B = 11,0 \text{ ton} \quad (3)$$

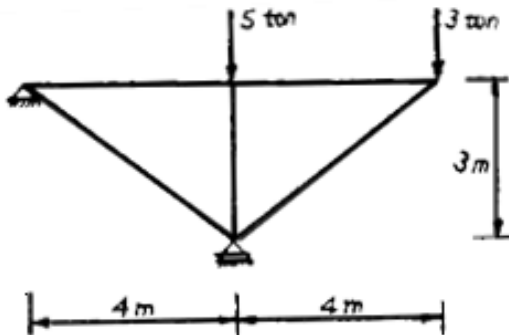
$$(2) \text{ ve } (3) \text{ den } A = 8,0 - 11,0 = -3,0 \text{ t} \quad (4)$$

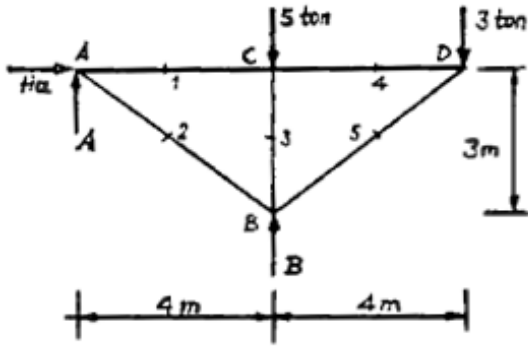
olarak mesnet tepkileri bulunmuş olur.

ÇÖZÜMLÜ SORULAR

Örnek 1.

Şekilde verilen kafes sistemin çubuk kuvvetlerini bulunuz





A mesnet düğümünden başlamak suretiyle her düğüm noktasına, bir noktada kesişen kuvvetlere ait bilinen iki izdüşüm denge denklemlerini uygulayarak çubuk kuvvetleri hesaplanır. Başlangıçta çubuk kuvvetleri çekme kabul edilirse (yani + işaretli) işaretin negatif çıkması seçilen yönün ters olduğunu dolayısıyla çubuğun çekmeye değil basınca çalıştığını göstermiş olur.

A düğüm noktası :

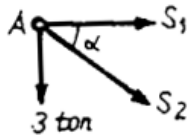
$$\Sigma Y=0 (\uparrow+) -3,0-S_2 \sin\alpha=0$$

$$S_2 = -5,0 \text{ ton (basınç)} \quad (5)$$

$$\Sigma X=0 (\rightarrow+) S_1 + S_2 \cos\alpha=0$$

$$S_1 = -(-5,0) \cdot 0,8$$

$$S_1 = 4,0 \text{ ton (çekme)} \quad (6)$$



C düğüm noktası :

$$\Sigma X=0 (\rightarrow+) S_4 - 4,0 = 0 \rightarrow S_4 = 4,0 \text{ t} \quad (7)$$

$$\Sigma Y=0 (\uparrow+) -5,0 - S_3 = 0 \rightarrow S_3 = -5,0 \text{ t} \quad (8)$$

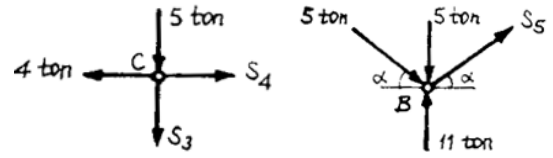
B düğüm noktası :

$$\Sigma X=0 (\rightarrow+) 5,0 \cos\alpha + S_5 \cos\alpha = 0$$

$$S_5 = -5,0 \text{ ton} \quad (9)$$

Kontrol :

$$\Sigma Y=0 (\uparrow) 11,0 - 5,0 - 5,0 \sin\alpha - 5,0 \sin\alpha = 0$$



D düğüm noktası :

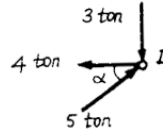
Kontrol :

$$\Sigma X=0 (\rightarrow+) -4,0 + 5,0 \cos\alpha = 0$$

$$\Sigma Y=0 (\uparrow+) 5,0 \sin\alpha - 3,0 = 0$$

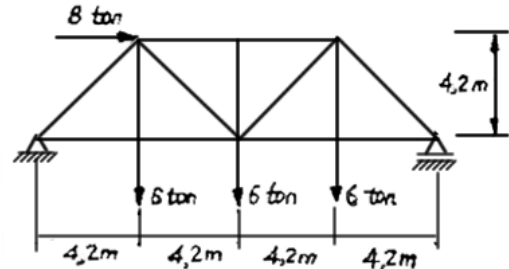
Şonuçlar bir tablo halinde düzenlenmiştir.

Çubuk No	Çekme (+) ton	Basınç (-) ton
S ₁	4,0	
S ₂		5,0
S ₃		5,0
S ₄	4,0	
S ₅		5,0



Örnek 2.

Şekilde görülen kafes sistemin çubuk kuvvetlerini bulunuz.



$$\Sigma X=0 (\rightarrow+) 8,0 - H_A = 0 \rightarrow H_A = 8,0 \text{ t} \quad (1)$$

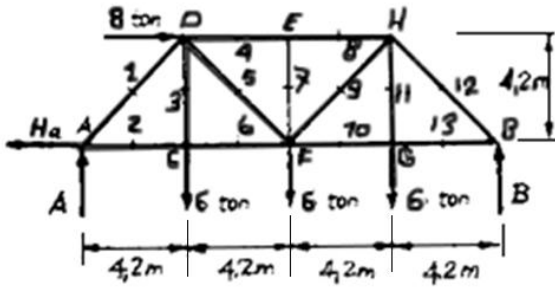
$$\Sigma Y=0 (\uparrow+) A + B - 3 \times 6,0 = 0$$

$$A + B = 18,0 \text{ ton} \quad (2)$$

$$\Sigma M_A = 0 \quad 4,2(1 \times 8,0 + 1 \times 6,0 + 2 \times 6,0 + 3 \times 6,0 - 4B) = 0$$

$$B = 11,0 \text{ ton} \quad (3)$$

$$(2) \text{ ve } (3) \rightarrow A = 18,0 - 11,0 = 7,0 \text{ ton} \quad (4)$$



A düğüm noktası :

$$\Sigma Y=0 (\uparrow+) 7,0+S_1 \sin \alpha=0$$

$$S_1=-9,87 \text{ ton} \quad (5)$$

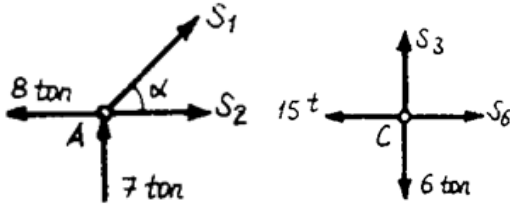
$$\Sigma X=0 (\rightarrow+) -8,0+(-9,87) \cos \alpha+S_2=0$$

$$S_2=15,0 \text{ ton} \quad (6)$$

C düğüm noktası :

$$\Sigma X=0 \rightarrow S_6=15,0 \text{ ton} \quad (7)$$

$$\Sigma Y=0 \rightarrow S_3=6,0 \text{ ton} \quad (8)$$



D düğüm noktası :

$$\Sigma Y=0 (\uparrow+) 9,87 \sin \alpha-6,0-S_5 \sin \alpha=0$$

$$S_5=1,41 \text{ ton} \quad (9)$$

$$\Sigma X=0 (\rightarrow+) 8,0+9,87 \cos \alpha+1,41 \cos \alpha+$$

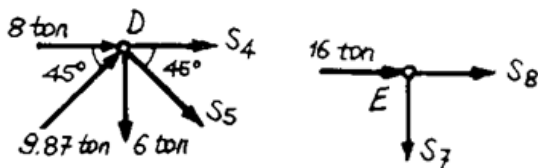
$$+S_4=0$$

$$S_4=-16,0 \text{ ton} \quad (10)$$

E düğüm noktası :

$$\Sigma X=0 (\rightarrow+) 16,0+S_8=0 \rightarrow S_8=-16,0 \text{ ton} \quad (11)$$

$$\Sigma Y=0 (\uparrow+) S_7=0 \quad (12)$$



F düğüm noktası :

$$\Sigma Y=0 (\uparrow+) 1,41 \sin \alpha-6,0+S_9 \sin \alpha=0$$

$$S_9=7,07 \text{ ton} \quad (13)$$

$$\Sigma X=0 (\rightarrow+) -15,0-1,41 \cos \alpha+7,07 \cos \alpha+ \\ +S_{10}=0$$

$$S_{10}=11,0 \text{ ton} \quad (14)$$

G düğüm noktası :

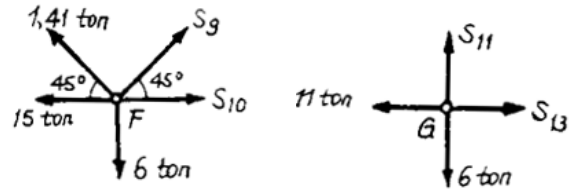
$$\Sigma X=0 \rightarrow S_{13}=11,0 \text{ ton} \quad (15)$$

$$\Sigma Y=0 \rightarrow S_{11}=6,0 \text{ ton} \quad (16)$$

H düğüm noktası :

$$\Sigma X=0 (\rightarrow+) 16,0-7,07 \cos \alpha+S_{12} \cos \alpha=0$$

$$S_{12}=-15,51 \text{ ton} \quad (17)$$



Kontrol :

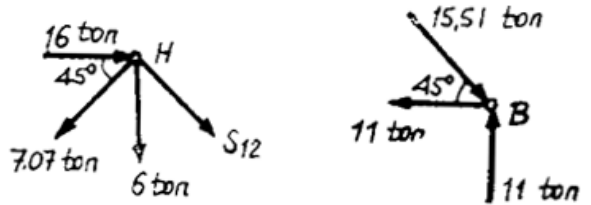
$$\Sigma Y=0 (\uparrow+) -7,07 \times \sin 45^\circ-6,0-$$

$$-(-15,51) \sin 45^\circ=0$$

B düğüm noktası (kontrol) :

$$\Sigma X=0 (\rightarrow+) -11,0+15,51 \cos 45^\circ=0$$

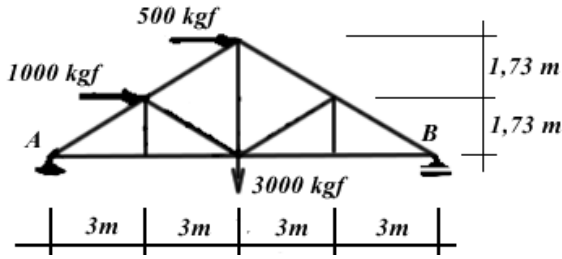
$$\Sigma Y=0 (\uparrow+) 11,0-15,51 \sin 45^\circ=0$$



Çubuk No	Çekme (+) ton	Basınç (-) ton
S ₁		9.87
S ₂	15.00	
S ₃	6.00	
S ₄		16.00
S ₅	1.41	
S ₆	15.00	
S ₇	0	
S ₈		16.00
S ₉	7.07	
S ₁₀	11.00	
S ₁₁	6.00	
S ₁₂		15.51
S ₁₃	11.00	

Örnek 3.

Üzerindeki dış kuvvetleri ve geometrik ölçüleri verilen kafes yapının şekilde gösterilen 1,2 ve 3 nolu çubuklar üzerindeki kuvvetleri kesim yöntemi ile bulunuz.



Şekilde görülen serbest cisim diyagramına denge denklemleri uygulanırsa mesnet tepkileri,

$$\Sigma X = 0 \quad (+ \rightarrow) \quad -H_A + 1000 + 500 = 0$$

$$H_A = -1500 \text{ kg} \quad (1)$$

$$\Sigma Y = 0 \quad (+ \uparrow) \quad A + B - 3000 = 0$$

$$A + B = 3000 \quad (2)$$

$$\Sigma M_A = 0 \quad 1,73 \times 1000 + 3,46 \times 500 + 6,0 \times 3000 - 12,0 \times B = 0$$

$$B = 1790 \text{ kg} \quad (3)$$

$$(2) \text{ ve } (3) \rightarrow A = 3000 - 1790 = 1210 \text{ kg} \quad (4)$$

olur. S_1 , S_2 ve S_3 çubuk kuvvetlerinin hesabı için C , A ve D noktalarına göre, kesim yapılan kısmın bir tarafındaki kuvvetlerin moment denge denklemleri yazılırsa,

$$\Sigma M_C = 0 \quad 6,0 \times 1210 + 1,73 \times 1000 + 3,0 \times S_1 = 0$$

$$S_1 = -3000 \text{ kg (basıncı)} \quad (5)$$

$$\Sigma M_A = 0 \quad 1,73 \times 1000 + 3,0 \times S_2 = 0$$

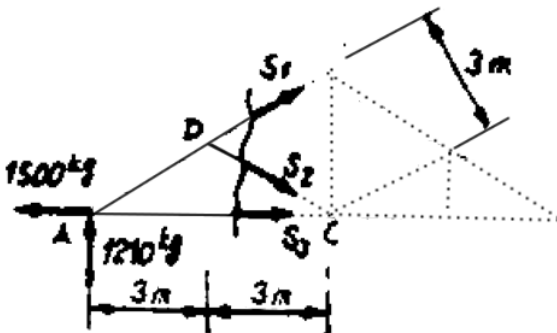
$$S_2 = -577 \text{ kg (basıncı)} \quad (6)$$

$$\Sigma M_D = 0 \quad 3,0 \times 1210 + 1,73 \times 1500 - 1,73 \times S_3 = 0$$

$$S_3 = 3600 \text{ kg} \quad (7)$$

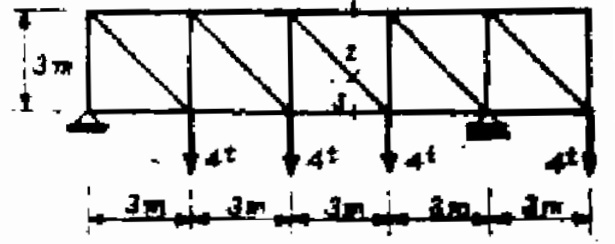
elde edilir.

Burada çubuk kuvvetlerinin yönü çekme yani (+) kabul edilmiştir. Negatif çıkması seçilen yönün ters olduğu anlamına geldiği gibi basıncı olduğunu da göstermiş olur.



Örnek 4

Şekilde verilen kafes yapının iç kısımlarındaki 1,2 ve 3 nolu çubuklara gelen kuvvetleri kesim yöntemi ile hesaplayınız.



Serbest cisim diyagramına denge denklemleri uygulanırsa mesnet tepkileri :

$$\Sigma X = 0 \quad (+ \rightarrow) \quad H_A = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma Y = 0 \quad (+ \uparrow) \quad A + B - 4 \times 4,0 = 0$$

$$A + B = 16,0$$

$$\Sigma M_A = 0 \quad 3,0 \times 4 + 6,0 \times 4 + 9,0 \times 4 + 15,0 \times 4 - 12,0 \times B = 0$$

$$B = 11,0 \text{ ton} \quad (3)$$

$$(2) \text{ ve } (3) \rightarrow A = 16,0 - 11,0 = 5,0 \text{ ton} \quad (4)$$

olur.

Kesim yapılan kısmın bir tarafı için C ve D noktalarına göre alınan iki moment ve bir izdüşüm denge denklemleri yazılırsa,

$$\Sigma M_C = 0 \quad 9,0 \times 5 + 3,0 \times S_1 - 3,0 \times 4 - 6,0 \times 4 = 0$$

$$S_1 = -3,0 \text{ ton} \quad (5)$$

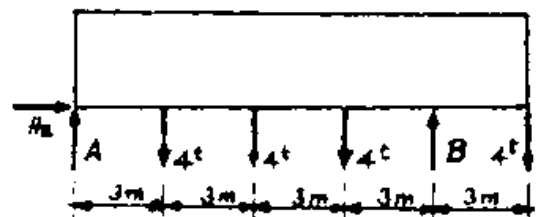
$$\Sigma M_D = 0 \quad 6,0 \times 5 - 3,0 \times 4 - 3,0 \times S_3 = 0$$

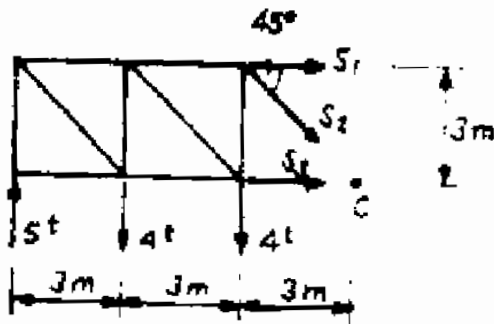
$$S_3 = 6,0 \text{ ton} \quad (6)$$

$$\Sigma Y = 0 \quad (+ \uparrow) \quad 5 - 4 - 4 - S_2 \sin 45^\circ = 0$$

$$S_2 = -4,25 \text{ ton} \quad (7)$$

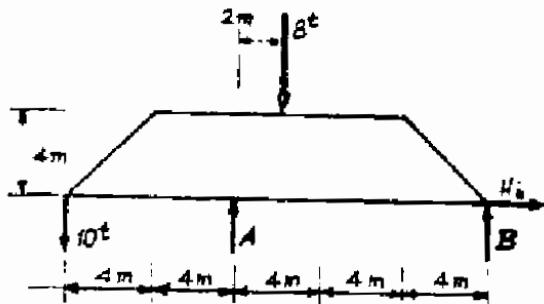
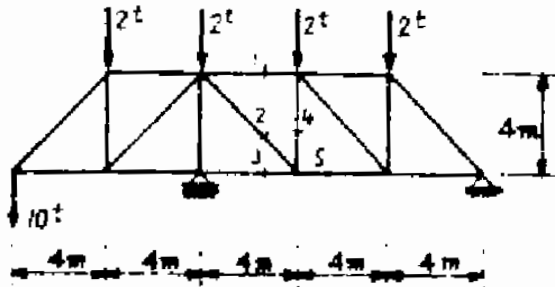
bulunur.





Örnek 5

Prob. 4.7. Şekilde görülen kafes sisteminde 1, 2, 3, 4 ve 5 nolu çubuk kuvvetlerini hesaplayınız.



Şekilde verilen serbest cisim diyagramına denge denklemleri uygulanırsa

$$\Sigma X = 0 \left(\begin{matrix} + \\ \rightarrow \end{matrix} \right) \quad H_b = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma Y = 0 \left(\begin{matrix} + \\ \uparrow \end{matrix} \right) \quad A + B - 10 - 4 \times 2 = 0 \\ A + B = 18,0 \quad (2)$$

$$\Sigma M_A = 0 \quad 2 \times 8,0 - 12,0 \times B - 8,0 \times 10 = 0 \\ B = -5,33 \text{ ton} \quad (3)$$

$$(2) \text{ ve } (3) \rightarrow A = 18,0 - (-5,33) = 23,33 \text{ ton} \quad (4)$$

olarak mesnet tepkileri bulunur.

Aranan çubuk kuvvetlerini bulmak için iki ayrı kesim yapılabilir :

Birinci kesim ile S_1 , S_2 ve S_3 çubuk kuvvetleri :

$$\Sigma M_c = 0 \quad 4,0 \times 2 + 8,0 \times 2 + 12,0 \times 5,33 + 4,0 \times S_3 = 0 \\ S_3 = -22,0 \text{ ton} \quad (5)$$

$$\Sigma M_D = 0 \quad 4,0 \times 2,0 + 8,0 \times 5,33 - 4,0 \times S_1 = 0 \\ S_1 = 12,67 \text{ ton} \quad (6)$$

$$\Sigma Y = 0 \left(\begin{matrix} + \\ \uparrow \end{matrix} \right) \quad S_2 \sin 45^\circ - 2,0 - 2,0 - 5,33 = 0 \\ S_2 = 13,2 \text{ ton} \quad (7)$$

İkinci kesim ile de S_4 ve S_5 çubuk kuvvetleri :

$$\Sigma M_E = 0 \quad 4,0 \times 2 + 8,0 \times 5,33 + 4,0 \times S_5 = 0 \\ S_5 = -12,67 \text{ ton} \quad (8)$$

$$\Sigma Y = 0 \left(\begin{matrix} + \\ \uparrow \end{matrix} \right) \quad 2,0 + 2,0 + 5,33 + S_4 = 0 \\ S_4 = -9,33 \text{ ton} \quad (9)$$

elde edilir.

