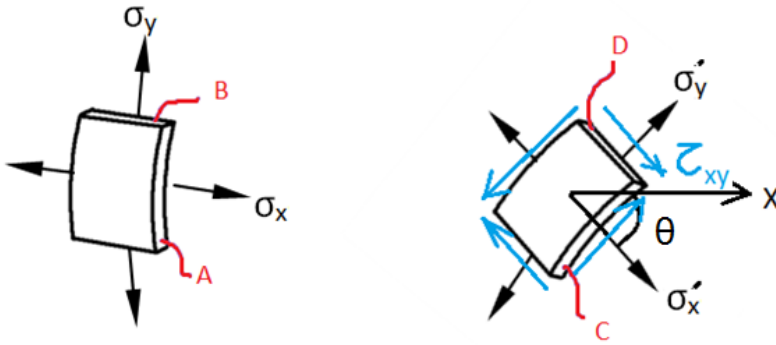


MUKAVEMET(9. Hafta)

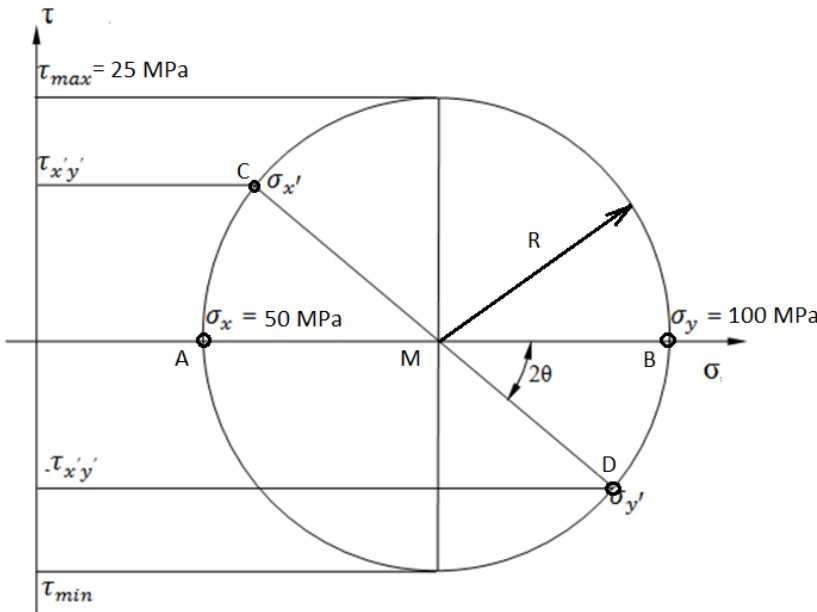
MOHR DAİRESİ

Mohr daresi gerilmeye uğrayan malzemenin üzerinden çıkarılan küçük bir elemanın tüm açılardaki düzlemleri normal gerilmelerini ve kayma gerilmelerini veren geliştirilmiş bir çizim yöntemidir. Hesaplanan nokta için mohr daresini bir defa çizdikten sonra eleman üzerindeki tüm gerilmeleri bulmak mümkün olacaktır. Çıkarılan eleman üzerinde aynı eksen üzerinde bulunan σ_x değeri, elemanın her iki tarafında da aynıdır. Aynı şekilde y eksenindeki gerilmelerde hem yukarıda hemde aşağıda aynıdır. Benzer şekilde τ_{xy} gerilmesi de diğer taraftakilerle aynı büyüklüğe sahiptir. Yani eleman üzerinde tek bir tane τ_{xy} değeri vardır. Bunların sadece yönleri farklıdır. Eleman üzerindeki tüm büyüklüklerin simetrisi bulunduğundan 360 derece dönme yerine 180 dönerek büyüklükler bir daire üzerinde gösterilir. Fakat burada eleman üzerinde θ kadar döndüğümüzde Mohr daresi üzerinde 2θ kadar dönerek açıları gösteririz.



A ve B düzlemleri üzerindeki gerilmeleri hesapladığımızı yada bildiğimizi varsayalım. Normal gerilmeler 100 MPa ve 50 MPa olsun. Kayma gerilmesi yok ve 0 olsun. Mohr daresini, iki tane düzlemin hem normal hemde kayma gerilmesini biliyorsak çizebiliriz.

A ve B düzlemleri üzerindeki gerilmeleri biliyor kabul ettik ve bunları kullanarak Mohr daresini çizelim. Mohr daresinde yatay eksen üzerinde Normal gerilmeler, dikey eksen üzerinde ise kayma gerilmeleri gösterilir. A noktası ($\sigma_x = 50 \text{ MPa}$, $\tau_{xy} = 0$) olacak şekilde eksenler üzerinde gösterilebilir. Benzer şekilde B noktasıda (100 MPa ve 0 MPa) değerlerini kullanarak eksenler üzerinde bir nokta ile gösterilir. (sonsuz küçük eleman üzerindeki tüm noktalar Mohr daresinde bir nokta ile temsil edilir) . A ve B noktaları kullanılarak daire artık çizilebilir. Bunun için dairenin Merkez (M) noktası ve Yarıçapını (R) bulmamız yeterli olur.



M noktasının yatay eksen üzerindeki yeri;

$$\left[M = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right] = \frac{(50 + 100)}{2} = 75$$

Dairenin yarıçapı R ise;

$$\left[R = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right] = \frac{(100 - 50)}{2} = 25$$

Mohr dairesini çizdikten sonra, küçük eleman üzerindeki tüm açılarda bulunan düzlemlerin Normal ve Kayma gerilmelerini bulabiliriz. Elemanı saat yönünde θ kadar çevirirsek, ortaya çıkan düzlemler Mohr dairesi üzerinde 2θ çevirerek gösterilir. Buna göre C ve D düzlemleri elemanı döndürdüğümüzde ortaya çıkan düzlemler olacaktır.

b) Saat ibresi yönünde elemanı 20° derece çevirdiğimizde ortaya çıkan gerilmeleri bulalım.

$$\sigma'_x = M - R \cos 2\theta$$

olacaktır

$$\sigma'_x = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta$$

$$\sigma'_x = 75 - 25 \cos(2 * 20)$$

$$\sigma'_x = 55,84 \text{ MPa}$$

olur.

$$\sigma'_y = M + R \cos 2\theta$$

$$\sigma'_y = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta$$

$$\sigma'_y = 75 + 25 \cos(2 * 20)$$

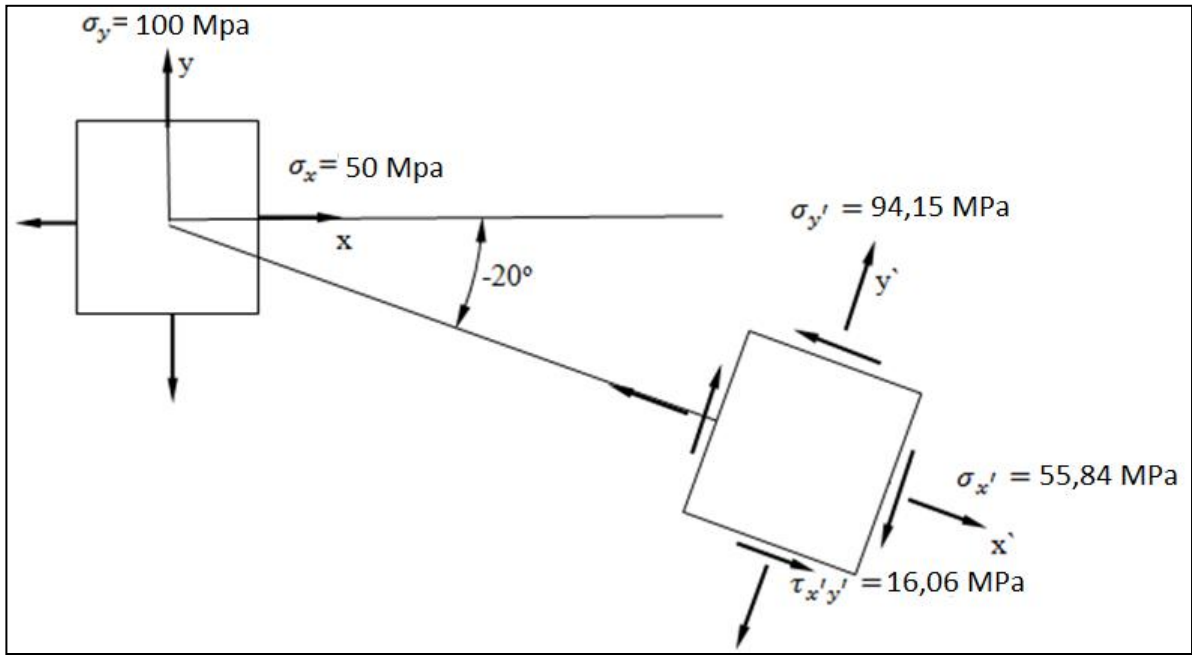
$$\sigma'_y = 94,15 \text{ MPa}$$

olur.

$$\tau'_{xy} = R \sin 2\theta$$

$$\tau'_{xy} = 25 \sin(2 * 20)$$

$$\tau'_{xy} = 16,06 \text{ MPa}$$



Şekil . Saat ibresi yönünde 20° döndürülmüş düzlemde gerilme hali

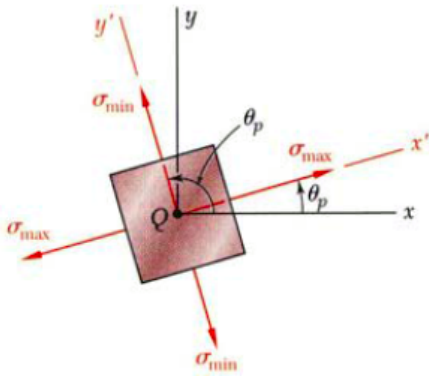
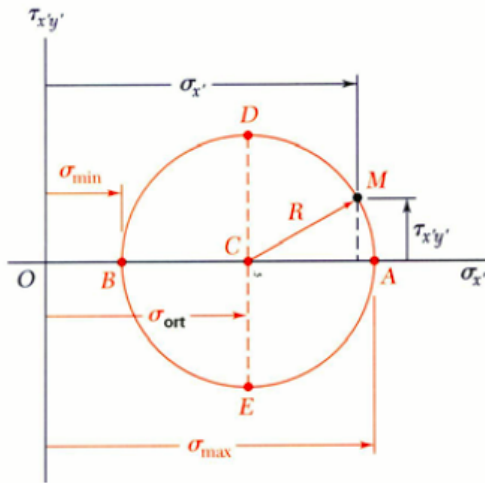
c) Asal gerilmeler (Maksimum ve Minimum normal gerilmele üzerinde kayma gerilmesi bulunmayan düzlemlerdeki Normal gerilmelerdir. Bu eleman için kayma gerilmesinin sıfır olduğu yani mohr dairesinde σ eksenini kesen noktalar asal gerilmeleri gösterir. Buradaki gerilmeler ise σ_x ve σ_y olarak çıkmıştı. Dolayısıyla Asal gerilmeler $\sigma_1 = 50 \text{ MPa}$ ve $\sigma_2 = 100 \text{ MPa}$ olur.

d) Maksimum ve minimum kayma gerilmeler mohr dairesinde üst ve alt tepe noktalarıdır. Bu noktalar ise dairenin yarıçapına eşittir. Buna göre formülü

$$R = \tau_{\max-\min} = \pm \frac{|\sigma_x - \sigma_y|}{2} = \pm \frac{|50 - 100|}{2} = \pm 50 \text{ MPa}$$

Özet:

Mohr dairesiyle ilgili genel formüllerimizi yazalım.



- Gerilme bileşeni denklemleri birleştirilirse bir çember için gerekli olan parametrik denklemi verir:

$$(\sigma_{x'} - \sigma_{ort})^2 + \tau_{x'y'}^2 = R^2$$

denklemdaki σ_{ort} ve R için

$$\sigma_{ort} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

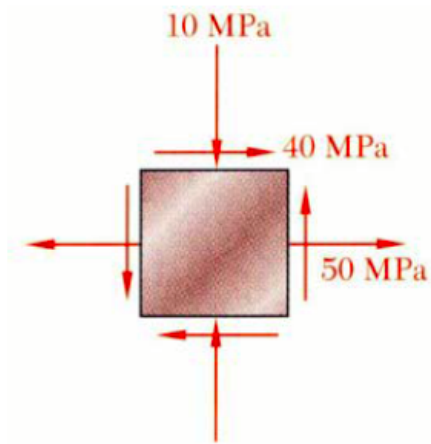
- Asal gerilmeler kesme gerilmeleri sıfır olan asal gerilme düzlemlerinde meydana gelir.

$$\sigma_{max,min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

- İki açı arasındaki farkın 90° olduğunu unutmayınız.

Örnek:



Şekilde verilen düzlem gerilme durumu için

- Asal düzlemleri
- Asal gerilmeleri
- Maksimum kesme gerilmesini ve o düzlemdeki normal gerilmeyi bulunuz.

ÇÖZÜM:

- Asal gerilmeler için eleman yönlenme açısını şu denklemden bulunuz:

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

- Asal gerilmeleri şu denklemden bulunuz:

$$\sigma_{max,min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

- Maksimum kesme gerilmeyi ve o düzlemdeki normal gerilmeyi şu denklemlerle hesaplayınız:

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

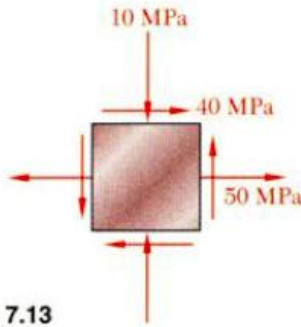


Fig. 7.13

$$\sigma_x = +50 \text{ MPa} \quad \tau_{xy} = +40 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = -10 \text{ MPa}$$

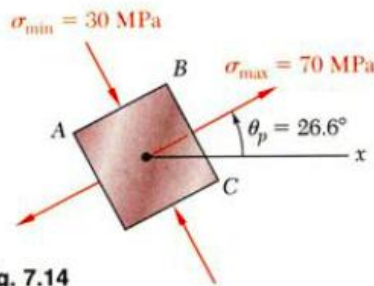


Fig. 7.14

Örnek

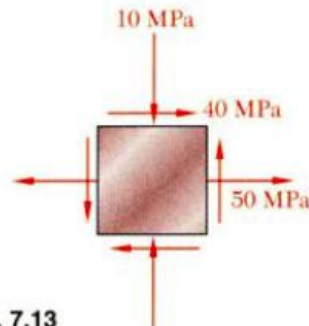


Fig. 7.13

$$\sigma_x = +50 \text{ MPa} \quad \tau_{xy} = +40 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = -10 \text{ MPa}$$

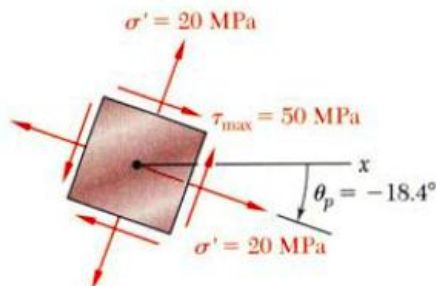


Fig. 7.16

ÇÖZÜM:

- Asal gerilmeler için eleman yönlenme açısını şu denklemden bulunuz:

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2(+40)}{50 - (-10)} = 1.333$$

$$2\theta_p = 53.1^\circ, 233.1^\circ$$

$$\theta_p = 26.6^\circ, 116.6^\circ$$

- Asal gerilmeleri şu denklemden bulunuz:

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= 20 \pm \sqrt{(30)^2 + (40)^2}$$

$$\sigma_{\max} = 70 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\min} = -30 \text{ MPa}$$

- Maksimum kesme gerilmesini şu denklemle hesaplayınız:

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= \sqrt{(30)^2 + (40)^2}$$

$$\tau_{\max} = 50 \text{ MPa}$$

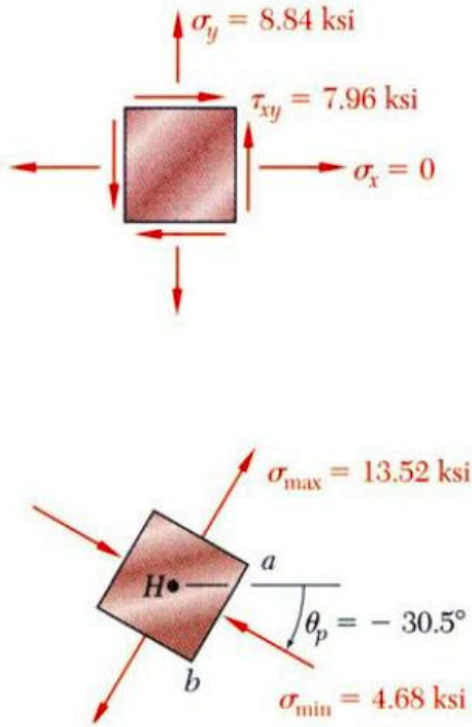
$$\theta_s = \theta_p - 45^\circ$$

$$\theta_s = -18.4^\circ, 71.6^\circ$$

- O düzlemdeki normal gerilmeyi şu denklemle hesaplayınız:

$$\sigma' = \sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{50 - 10}{2}$$

$$\sigma' = 20 \text{ MPa}$$

Örnek:

- Asal düzlemleri ve asal gerilmeleri bulunuz.

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2(7.96)}{0 - 8.84} = -1.8$$

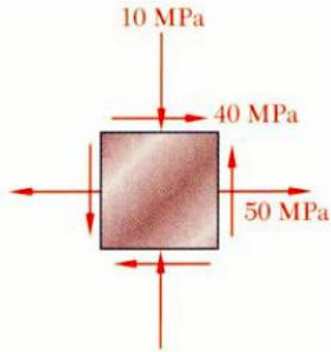
$$2\theta_p = -61.0^\circ, 119^\circ$$

$$\theta_p = -30.5^\circ, 59.5^\circ$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\max, \min} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ &= \frac{0 + 8.84}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0 - 8.84}{2}\right)^2 + (7.96)^2}\end{aligned}$$

$$\sigma_{\max} = +13.52 \text{ ksi}$$

$$\sigma_{\min} = -4.68 \text{ ksi}$$

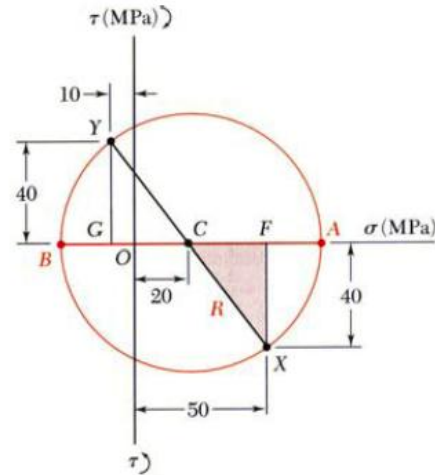
Örnek

Şekilde verilen gerilme durumu için

- Mohr çemberini çiziniz.
- Asal düzlemleri bulunuz.
- Asal gerilmeleri bulunuz.
- Maksimum kesme gerilmesini ve o düzlemdeki normal gerilmeyi bulunuz.

ÇÖZÜM:

- Mohr çemberini çiziniz.

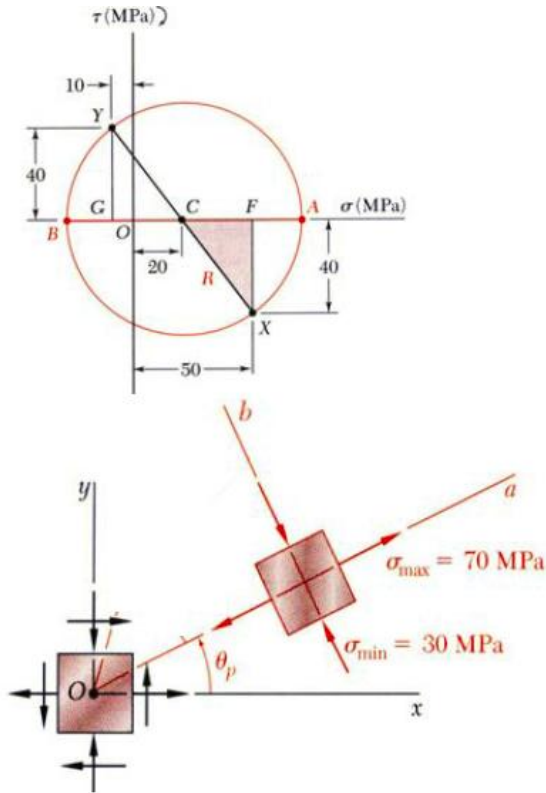


$$\sigma_{\text{ort}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{(50) + (-10)}{2} = 20 \text{ MPa}$$

$$CF = 50 - 20 = 30 \text{ MPa} \quad FX = 40 \text{ MPa}$$

$$R = CX = \sqrt{(30)^2 + (40)^2} = 50 \text{ MPa}$$

Örnek



- Asal düzlemler ve asal gerilmeler

$$\sigma_{max} = OA = OC + CA = 20 + 50$$

$$\sigma_{max} = 70 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{min} = OB = OC - BC = 20 - 50$$

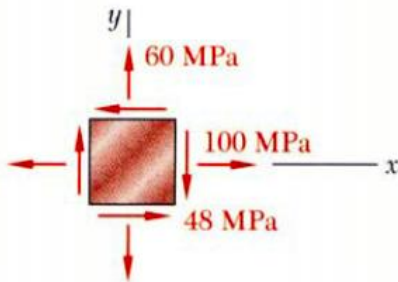
$$\sigma_{min} = -30 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{FX}{CP} = \frac{40}{30}$$

$$2\theta_p = 53.1^\circ$$

$$\theta_p = 26.6^\circ$$

Örnek

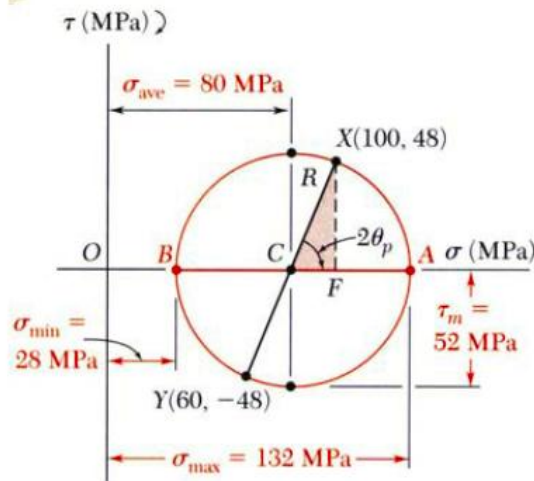


Verilen gerilme durumu için

- Asal düzlemler ve asal gerilmeleri bulunuz.
- Verilen eleman 30 derece saat yönü tersi döndürülünce elde edilen eleman üzerindeki gerilme bileşenlerini bulunuz.

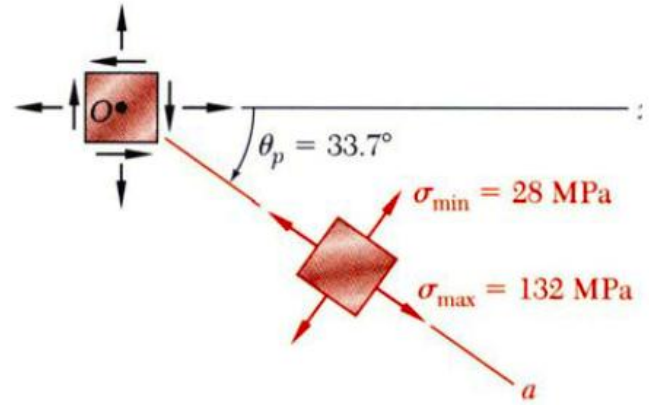
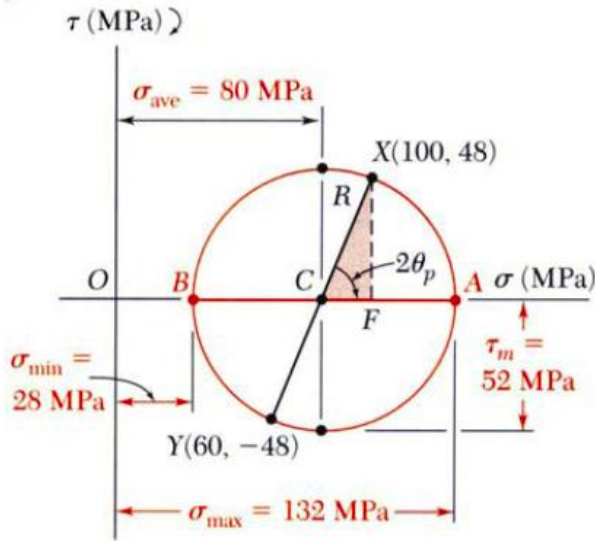
ÇÖZÜM:

- Mohr çemberini çiziniz.



$$\sigma_{ort} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{100 + 60}{2} = 80 \text{ MPa}$$

$$R = \sqrt{(CF)^2 + (FX)^2} = \sqrt{(20)^2 + (48)^2} = 52 \text{ MPa}$$



- Asal düzlemler ve asal gerilmeler

$$\tan 2\theta_p = \frac{XF}{CF} = \frac{48}{20} = 2.4$$

$$2\theta_p = 67.4^\circ$$

$$\theta_p = 33.7^\circ \text{ clockwise}$$

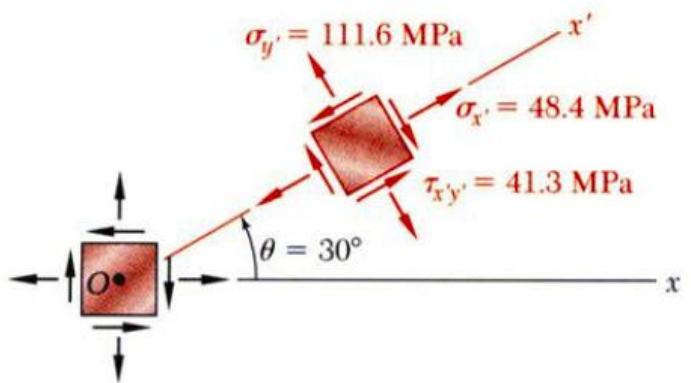
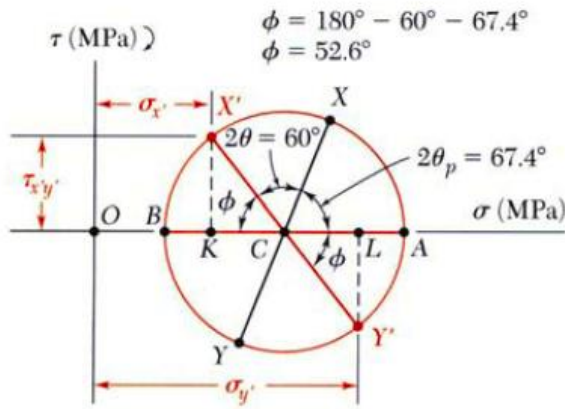
$$\sigma_{\max} = OA = OC + CA = 80 + 52$$

$$\sigma_{\max} = +132 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\max} = OA = OC - BC = 80 - 52$$

$$\sigma_{\min} = +28 \text{ MPa}$$

Örnek



- 30° döndürülme sonrası gerilme bileşenleri
- Döndürülmüş eleman üzerindeki gerilme bileşenlerini bulmak için Mohr çemberindeki X' ve Y' noktalarını elde etmek üzere XY eksenini saat yönü tersi $2\theta = 60^\circ$ derece döndürülür.

$$\phi = 180^\circ - 60^\circ - 67.4^\circ = 52.6^\circ$$

$$\sigma_{x'} = OK = OC - KC = 80 - 52 \cos 52.6^\circ$$

$$\sigma_{y'} = OL = OC + CL = 80 + 52 \cos 52.6^\circ$$

$$\tau_{x'y'} = KX' = 52 \sin 52.6^\circ$$

$$\sigma_{x'} = +48.4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{y'} = +111.6 \text{ MPa}$$

$$\tau_{x'y'} = -41.3 \text{ MPa}$$