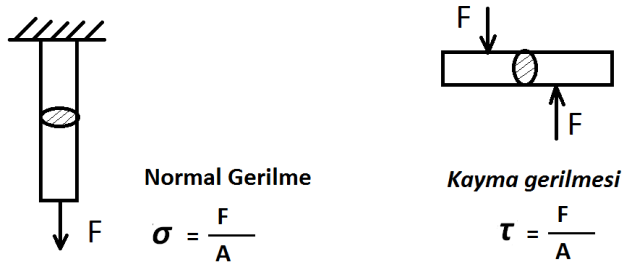


BİLGİSAYAR DESTEKLİ TASARIM VE ANALİZ (ANSYS) (4.Hafta)

GERİLME KAVRAMI VE KIRILMA HİPOTEZLERİ

Gerilme

Birim yüzeye düşen yük (kuvvet) miktarı olarak tanımlanabilir. Parçanın içerisinde oluşan zorlanma miktarını gösterir. Gerilme vektörü, incelenen kesit yüzeye dikey etkiyorsa, bu gerilmeye **normal gerilme (σ)**, yüzeye yatay etki ediyorsa (yüzeye yapışık ise) buna **kayma gerilmesi (τ)** denilmektedir. Temelde gerilmeler bu iki çeşitten oluşmaktadır. Bu gerilmeler değişik yüklemeler altında karma şekillerde bulunabilir. Bazen sadece biri, bazende her ikisi bir parçada olabilir. Bu sebeple yükleme türlerine göre gerilmeler isimlendirilir fakat sonuçta yine bu iki çeşit gerilmeden oluşur.

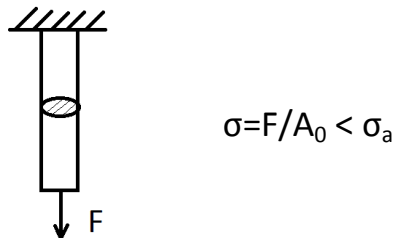


Yüklemeye Durumuna Göre Gerilme Çeşitleri

Çekme gerilmesi
Basma gerilmesi
Eğilme gerilmesi
Burulma gerilmesi
Kesme gerilmesi
Burkulma gerilmesi
Yüzey gerilmesi
Özel gerilmeler

Tek Boyutlu Gerilme Hesabı

Bir çubuk eksenel doğrultuda çekilmediğinde yada basıya maruz bırakıldığında üzerinde tek eksen doğrultusunda gerilmeler oluşur. Bu tip gerilmelerde eksen doğrultusundaki yüzeylerde kayma gerilmeleri oluşmaz sadece normal gerilmeler vardır. Bu nedenle oluşan gerilme direk olarak Akma ile karşılaştırılabilir. Malzemenin dayanabilmesi için oluşan gerilme akmadan küçük olmalıdır

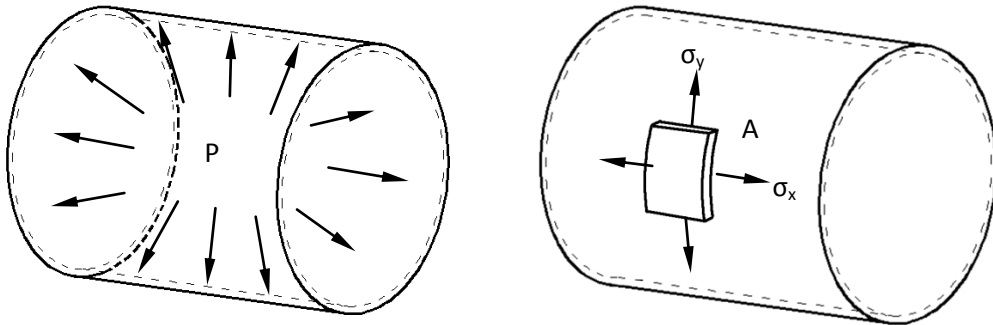


İki Boyutlu Gerilme Hesabı

Malzeme üzerinde oluşan gerilmeler iki eksende oluşuyorsa bu tip gerilmelere denir. Bu tip gerilmelerin oluştuğu en iyi örnek içerisinde basınç bulunan ince cidarlı kaplardır. Bu tip kaplarda eksenel ve çevresel yönlerde gerilmeler oluşur. Merkezden dışarı doğru oluşan gerilmeler ihmal edilebilecek düzeydedir. Bununla ilgili konuyu örnek üzerinde anlatalım.

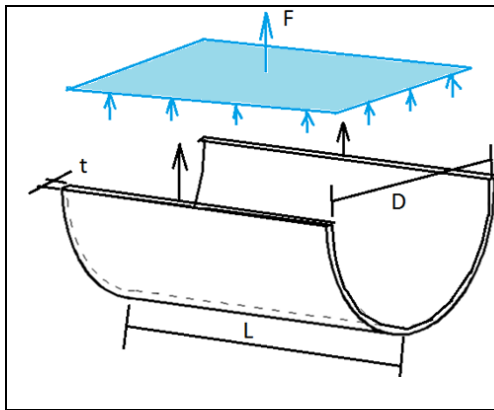
Örnek: Şekil’de gösterildiği gibi bir kapalı silindirik bir kabın içerisine bir $P=1$ MPa’lık basınç uygulanmaktadır. Tüpün boyu 300 mm, dış çapı 100 mm, cidar kalınlığı 0.5 mm olmak üzere aşağıdaki analitik hesapları yapıp, Ansys sonuçları ile karşılaştırınız.

- Silindirin yüzeyinde herhangi bir A noktasındaki gerilmeleri,
- Saat ibresi yönünde yatayla 20° lik açı yapan düzlemdeki gerilme halini,
- Asal gerilmeleri,
- Maksimum ve minimum kayma gerilmelerini,
- Hesaplanan tüm gerilmeleri Mohr dairesinde gösteriniz
- Von Mises ve Tresca kriterlerine göre oluşan gerilmeleri bulup akma ile karşılaştırınız. (Malzemenin akma gerilmesi 230 Mpa).



Şekil. İnce cidarlı silindirik bir kaptaki oluşan boyuna ve çevresel gerilmeler.

a) İnce cidarlı silindirik basınçlı kabın cidar yüzeyindeki bir A noktasından alınan diferansiyel (sonsuz küçük) bir elemanda çevresel gerilme şu şekilde hesaplanır.



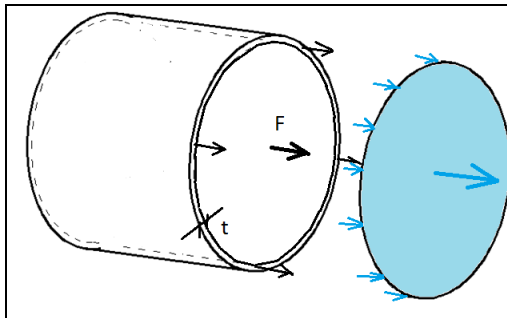
Cismi ikiye ayırmaya çalışan basınç kuvveti cismin ortasındaki alana etki eden kuvvettir. Bu kuvvet

$$P = \frac{F}{A_{\text{kapak}}} \Rightarrow F = P * A_{\text{kapak}} \Rightarrow F = P L D$$

Olarak bulunur. Ortaya çıkan bu kuvvet yan cidarları koparmaya çalışacak ve buralarda y doğrultusunda gerilme oluşmasına neden olacaktır.

$$\sigma_y = \frac{F}{A_{\text{kesit}}} = \frac{P L D}{2 t L} = \frac{P D}{2 t} \text{ olur.}$$

Boyuna gerilmeler ise



Cismi ortadan ikiye ayırmaya çalışan basınç kuvveti, dairesel kapağa etki eden kuvvete eşittir. Bu kuvvet;

$$P = \frac{F}{A_{\text{kapak}}} \Rightarrow F = P * A_{\text{kapak}} \Rightarrow F = P \frac{\pi D^2}{4}$$

Olarak bulunur. Ortaya çıkan bu kuvvet cidarları alçmaya çalışır. Buralarda x doğrultusunda gerilmelerin oluşmasına neden olur.

$$\sigma_x = \frac{F}{A_{\text{kesit}}} = \frac{P \frac{\pi D^2}{4}}{t \pi D} = \frac{P D}{4 t} \text{ olur.}$$

Buna göre sayısal değerler

$$\sigma_y = \frac{(1 \cdot 10^6) \cdot (100 \cdot 10^{-3})}{2 \cdot (0,5 \cdot 10^{-3})} = 100 \text{ MPa}$$

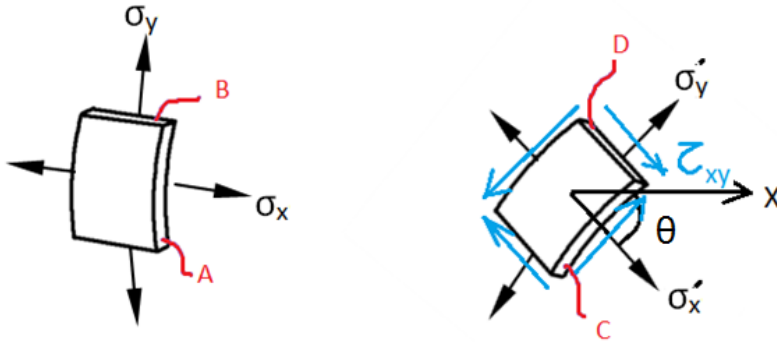
Ve

$$\sigma_x = \frac{(1 \cdot 10^6) \cdot (100 \cdot 10^{-3})}{4 \cdot (0,5 \cdot 10^{-3})} = 50 \text{ MPa}$$

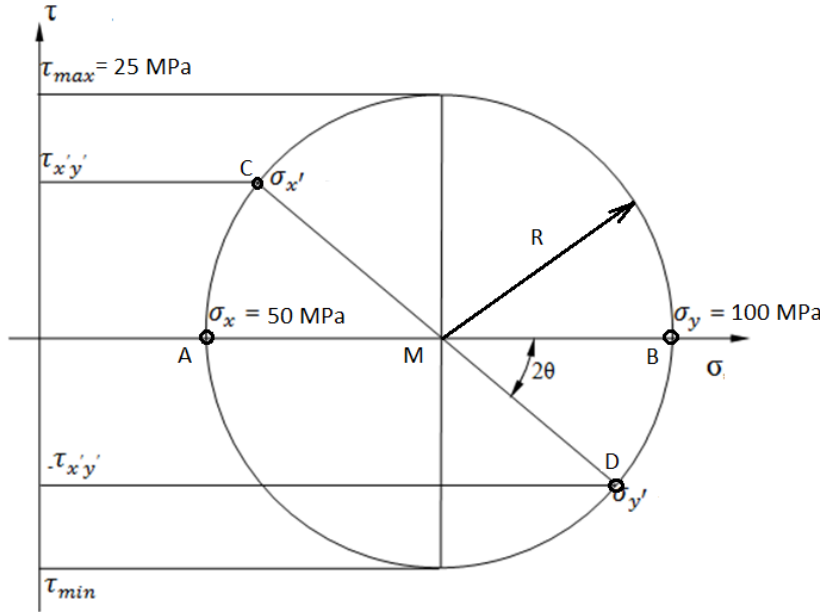
Bulunur. Parça eksenler doğrultusunda tam dik olarak zorlandığı için kesitler τ_{xy} kayma gerilmesi ortaya çıkmaz.

Bu iki değer bu küçük çıkarılan eleman için Mohr Dairesini çizebilmemizi sağlar. Mohr dairesi çıkarılan elemanın tüm açılardaki düzlemleri için bize hem normal gerilmeleri verecektir hemde kayma gerilmelerini verecektir. Bu nedenle mohr dairesini bir defa çizdikten sonra eleman üzerindeki tüm gerilmeleri bir daha bulmak mümkün olacaktır. Çıkarılan elman üzerinde aynı eksen üzerinde bulunan σ_x değeri elemanın her iki tarafındada aynıdır.

Aynı şekilde y eksenindeki gerilmelerde hem yukarıdaki hemde aşağıdaki aynıdır. Benzer şekilde τ_{xy} gerilmeside diğer taraftakilerle aynı büyüklüğe sahiptir. Yani eleman üzerinde tek bir tane τ_{xy} değeri vardır. Bunların sadece yönleri farklıdır. Eleman üzerindeki tüm büyüklüklerin simetrisi bulunduğundan 360 derece dönme yerine 180 dönerek büyüklükler bir daire üzerinde gösterilir. Fakat burada eleman üzerinde α kadar döndüğümüzde Mohr dairesi üzerinde 2θ kadar dönerek açıları gösteririz.



A ve B düzlemleri üzerindeki gerilmeleri bulmuştuk. normal gerilmeler 100 MPa ve 50 MPa idi. Kayma gerilmesi ise yoktu ve 0 idi. Mohr dairesini, iki tane düzlemin hem normal hemde kayma gerilmesini biliyorsak çizebiliriz. Burada A ve B düzlemleri üzerindeki gerilmeleri biliyoruz. Bunları kullanarak Mohr dairesini çizelim. Mohr dairesinde yatay eksen üzerinde Normal gerilmeler, dikey eksen üzerinde ise kayma gerilmeleri gösterilir. A noktası ($\sigma_x = 50 \text{ MPa}$, $\tau_{xy} = 0$) olacak şekilde eksenler üzerinde gösterilebilir. Benzer şekilde B noktasıda (100 Mpa ve 0 Mpa) değerlerini kullanarak eksenler üzerinde bir nokta ile gösterilir. (sonsuz küçük eleman üzerindeki tüm noktalar Mohr dairesinde bir nokta ile temsil edilir) . A ve B noktaları kullanılarak daire artık çizilebilir. Bunun için dairenin Merkez (M) noktası ve Yarıçapını (R) bulmamız yeterli olur.



M noktasının yatay eksen üzerindeki yeri;

$$M = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{(50+100)}{2} = 75$$

Dairenin yarıçapı R ise şu fomülle bulunabilir.

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 25$$

Mohr dairesini çizdikten sonra artık Küçük eleman üzerindeki tüm açılarda bulunan düzlemlerin üzerindeki Normal ve Kayma gerilmelerini bulabiliriz. Elemanı saat yönünde θ kadar çevirirsek, ortaya çıkan düzlemler Mohr dairesi üzerinde 2θ çevirerek gösterilir. Buna göre C ve D düzlemleri elemanı döndürdüğümüzde ortaya çıkan düzlemler olacaktır.

b) Saat ibresi yönünde elemanı 20° derece çevirdiğimizde ortaya çıkan gerilmeleri bulalım.

$$\sigma'_x = M - R \cos 2\theta \text{ olacaktır}$$

$$\sigma'_x = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta$$

$$\sigma'_x = 75 - 25 \cos(2 * 20)$$

$$\sigma'_x = 55,84 \text{ MPa}$$

$$\sigma'_y = M + R \cos 2\theta \text{ olacaktır}$$

$$\sigma'_y = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta$$

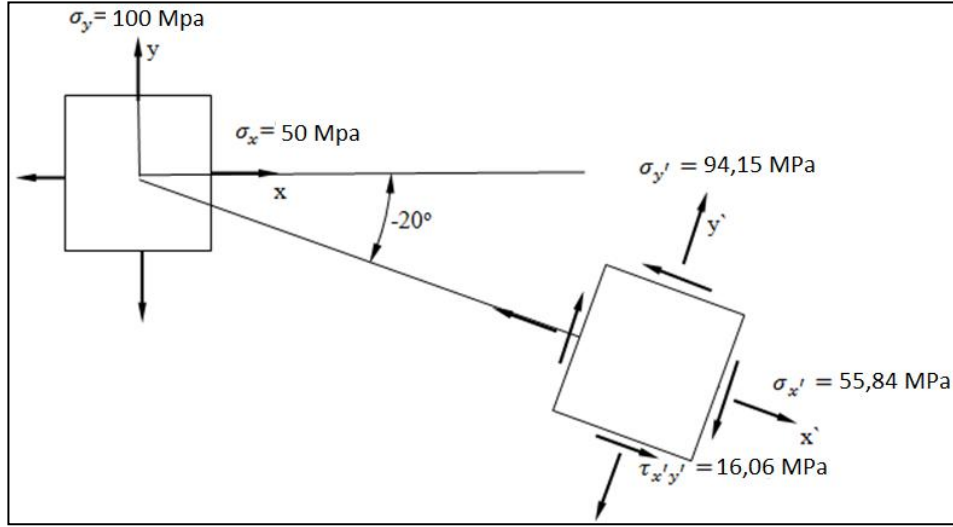
$$\sigma'_y = 75 + 25 \cos(2 * 20)$$

$$\sigma'_y = 94,15 \text{ MPa}$$

$$\tau'_{xy} = R \sin 2\theta$$

$$\tau'_{xy} = 25 \sin(2 * 20)$$

$$\tau'_{xy} = 16,06 \text{ MPa}$$



Şekil . Saat ibresi yönünde 20° döndürülmüş düzlemde gerilme hali

c) Asal gerilmeler: Asal gerilmeler kayma gerilmesinin olmadığı sadece Normal gerilmenin bulunduğu düzlemleri gösteren buralardaki normal gerilmelere denir. Kayma gerilmesi olmadığı için Mohr dairesinde σ ekseninde bulunurlar. Asal gerilmeler σ_1 , σ_2 , σ_3 şeklinde gösterilir. Yada a,b,c indisleri kullanılabilir.

Asal gerilmeler σ_x ve σ_y değerleri ile aynı olmuş oluyor.

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{1,2} = 75 \mp 25$$

$$\sigma_1 = 100 \text{ MPa} = \sigma_a$$

$$\sigma_2 = 50 \text{ MPa} = \sigma_2$$

Asal doğrultular, yani asal gerilmelerin bulunduğu düzlemlerin x ve y eksenlerine olan açıları Mohr dairesi çizildikten sonra hesapla bulunabilir.

Maksimum ve minimum kayma gerilmeleri Mohr dairesinin yarıçapı olacağından aşağıdaki şekilde hesaplanabilir.

$$\tau_{\max, \min} = \mp R = \mp \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \mp 25 \text{ MPa}$$

Maksimum ve minimum kayma gerilmelerinin düzlemleri de formül kullanmadan Mohr dairesi çizildikten sonra bulunabilir.

Akma gerilmesi Tresca hipotezine göre

$$\frac{\sigma_{y_1}}{2} = \frac{\sigma_a - \sigma_b}{2}$$

$$\sigma_{y_1} = 151,6 * 10^6 \text{ Pa}$$

Von Mises hipotezine göre
Burada

$$2\sigma_{y_1}^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2$$

$$\sigma_3 = 0$$

olduğundan yukarıdaki denklemden değerler yerine konulursa

$$2\sigma_{y_1}^2 = (151,6 - 75,8)^2 + (151,6 - 0)^2 + (75,8 - 0)^2$$

$$\sigma_{y_1} = 131,28 * 10^6 \text{ Pa}$$

bulunur.

KIRILMA TEORİLERİ

Malzemelerin fiziksel özelliklerinin tespit edilmesinde kullanılan test yöntemlerinin çoğunda numune basit bir yükleme türüne maruz bırakılır. Malzemelerin çoğunluğuna ait mukavemet değerlerinin önemli bir kısmı basit **çekme** deneylerinden elde edilir. Gevrek malzemeler genelde çekmeden ziyade basma gerilmesi altında çalıştığından bu malzemelere ait mukavemet değerlerinin çoğu da yine basit **basma** deneyinden elde edilir. Malzemelerin kayma mukavemetlerinin tespiti için de yine belirli test yöntemleri kullanılmaktadır. Bu tür yükleme durumuna tek eksenli yükleme denir. Bu noktadan hareketle tek eksenli gerilme halinde $\sigma_{\max} \leq \sigma_{em}$ veya $\tau_{\max} \leq \tau_{em}$ bağıntıları kullanılarak gerekli mukavemet hesaplamaları gerçekleştirilir. Böylece malzeme sadece çekme, basma veya kaymaya maruz ise bu değerler olduğu gibi kullanılarak gerekli mukavemet hesapları gerçekleştirilebilir. Burada σ_{em} , τ_{em} değerleri akma gerilmesinden çıkarılır. Akma gerilmesinde ne kadar daha emniyetli olması isteniyorsa ona göre belirlenir. Örneğin akma gerilmesi 300 MPa ise ve iki kat emniyet isteniyorsa σ_{em} 150 MPa olarak belirlenir. Malzemede oluşan gerilmenin bu emniyet sınırını geçmemesi gerekir.

Mühendislik uygulamaların bir çoğunda bazı noktalardaki gerilme halleri oldukça karışık olabilir ve birçok yönde hem normal hem de kayma gerilmelerine maruz kalabilirler. Böylece malzeme tek eksenliden ziyade iki veya üç eksenli gerilme durumuna maruz kalabilir. Bu tür yükleme altında malzemenin mukavemet değerlerinin tespiti tek eksenliye göre daha zor olmaktadır. Bu şekilde, bileşik gerilmeye maruz yerlerde gerekli mukavemet hesaplarının gerçekleştirilmesi için değişik teoriler önerilmiştir. Bu teorilerin amacı, malzemelerin basit çekme ve basma deneylerinden elde edilen değerler kullanılarak kombine yükleme durumlarında malzemenin ne zaman hasara uğrayacağını tespit etmektir.

Maksimum Kayma Genleme Enerjisi Teorisi(VON MISSES)

Huber tarafından 1904'de ortaya atılmasına rağmen Von Misses Teorisi olarak bilinen bu teoriye göre Şekil değiştirme enerjisinin belli bir sınırı aşması ile cisimde hasar başlar. Böylece bu teori;

$$2\sigma_V^2 = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 =$$

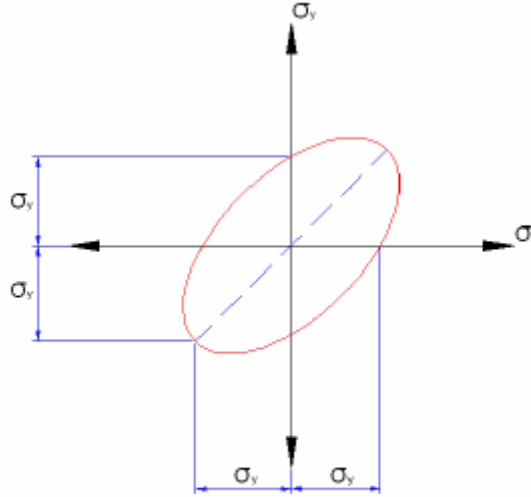
veya asal gerilmeler cinsinden;

$$2\sigma_V^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 =$$

Bağıntısı ile verilir. Burada σ_y malzemenin içinde oluşan diğer tüm gerilmelerin yerine kullanılan eşdeğer (von mises) gerilmesidir. Malzemede iki eksenli gerilme durumunda $\sigma_z = 0$ olacağından yukarıdaki bağıntı;

$$\sigma_y^2 = \sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2$$

şeklini alır. Bu denklem ise Şekil'deki gibi bir elipsi gösterir.



Şekil Von Misses Teorisi

Maksimum Kayma Gerilme Teorisi(TRESCA)

Tresca teorisi olarakta bilinen bu teoriye göre kombine yükleme altında malzemede oluşan maksimum kayma gerilmesi $\tau_{(max)}$ kayma emniyet gerilmesi $\tau_{(em)}$ değerini aştığında malzemede hasar başlar. Üç eksenli bir sistemde veya gerilmelerden biri pozitif, diğeri negatif ve üçüncüsü de sıfır olan bir yüklemde maksimum kayma gerilmesi;

$$\tau_{(max)} = (\sigma_1 - \sigma_3) / 2$$

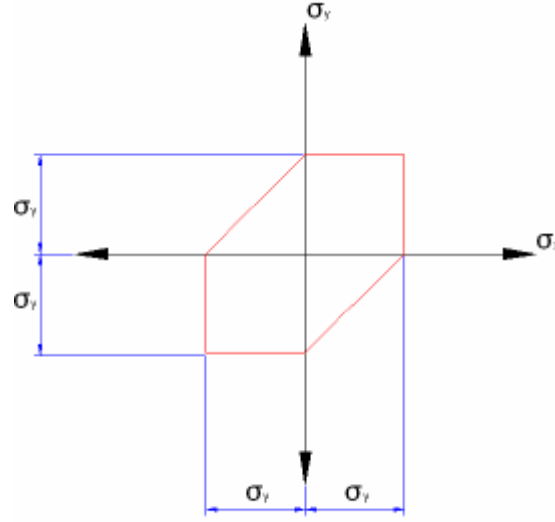
ile verilir. Bu teori daha ziyade sünek malzemeler için güvenilir sonuçlar vermektedir. Öte yandan tek eksenli gerilmelerde $\tau_{(em)} = \sigma_{(em)} / 2$ olarak verildiğinden;

$$\tau_{(max)} = (\sigma_1 - \sigma_3) / 2 = \sigma_{(em)} / 2 \text{ veya } (\sigma_1 - \sigma_3) = \sigma_{(em)}$$

şeklinde yazılabilir. İki eksenli gerilme için bu teori grafik olarak Şekil'de çizilmiştir. Asal gerilmelerden ikisinin de pozitif ve üçüncüsünün sıfır olduğu yükleme durumunda ise maksimum kayma gerilmesi;

$$\tau_{(max)} = (\sigma_1 - 0) / 2 = \sigma_1 / 2 \text{ ve akma } \sigma_1 / 2 = \sigma_y / 2 \text{ ve buradan } \sigma_1 = \sigma_y$$

şeklinde yazılabilir.



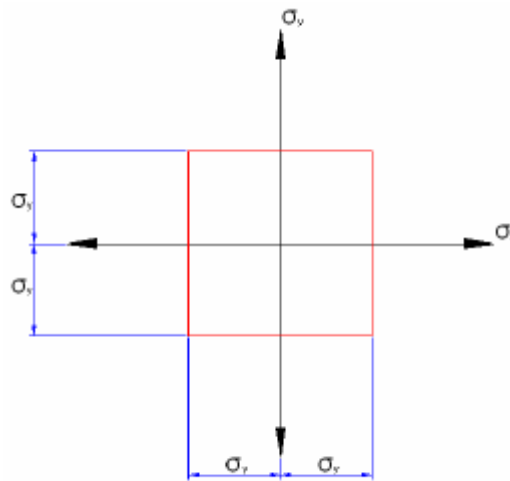
Şekil Tresca Teorisi

Maksimum Normal Gerilme Teorisi(RANKİNE)

Rankine teorisi olarakta bilinen bu teoriye göre kombine yükleme altında malzemede oluşan asal gerilmeler σ_1 , σ_2 ve σ_3 olmak üzere $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ olacağından malzemede oluşan maksimum asal gerilmenin değeri (σ_1) malzemenin çekme veya basma deneyinden elde edilen $\sigma_{(em)}$ değerini aştığında malzeme hasara uğrar. Böylece bu teoriye göre;

$$\sigma(\max) = \sigma_1 \leq \sigma_{(em)}$$

şeklinde ifade edilir. İki eksenli düzlemsel yükleme durumunda bu teori grafik olarak Şekil’de çizilmiştir. Yapılan deneyler bu teorinin tüm yükleme durumları için pek güvenilir sonuçlar vermediğini göstermiştir. Ancak gevrek malzemeler için elde edilen deneysel sonuçlar ile teorik sonuçları destekler mahiyette olduğu tespit edilmiştir. Bu teorinin en belirgin eksikliklerinden biri de çekme ve basma altında malzemede hasarın aynı gerilme seviyesinde ortaya çıktığını önermesidir. Oysa ki dökme demir ve beton gibi gevrek malzemeler basmada çekmeye rağmen daha mukavemetlidirler. Bu ise malzemede yer alan mikro boşlukların çekme gerilmesi sonucu ilerleyip malzemeyi tahrip etmesi yüzündendir.



Şekil Rankine Teorisi

Kırılma Teorilerinin Kıyaslanması

Von Misses kriteri ile Tresca kriteri birbirine çok yakındır. Bu teorilerden Von Misses Teorisinin bilhassa sünek malzemeler için elde bulunan pek çok deneysel sonuç ile uyum içinde olduğu bilinmektedir. Bu yüzden tasarım çalışmalarında bu teorinin uygulanması hergeçen gün daha da yaygınlaşmaktadır. Öte yandan maksimum normal gerilme teorisi(Rankine Teorisi) daha ziyade gevrek malzemeler için elde edilen deneysel sonuçlar ile uyum içindedir.