MAKİNE DİNAMİĞİ (2. Hafta)

STATİK VE DİNAMİĞİN TEMEL İLKELERİ, VEKTÖR MATEMATİĞİ

Mekanik sistemler üzerindeki kuvvetler denge halindeyse sistem hareket etmeyecektir (yada sabit hızla hareket eder). **Sistemin denge hali** için gerekli kuvvetlerin hesaplanması statik hesaplamalarla yapılır. Statik hesaplamalar ile dinamik hesaplamalar arasındaki **tek fark** dinamik sistemlerin içerisinde **atalet kuvvetleri**nin bulunmasıdır. Atalet kuvvetleri ise **ivmeler nedeniyle** çıkar. Eğer sistemde ivmeli bir hareket (hızlanma yada yavaşlama) yoksa sistem statik olarak çözülür. Hareket halindeki sistemlerde sisteme dışarıdan etki eden dış kuvvetlerin yanında, içte meydana gelen dinamik kuvvetlerde hesaplanarak (atalet kuvvetleri ve momentler), statik hesaplarda olduğu gibi çözüme gidilir.

Statik ve Dinamik sistem üzerinde kuvvet ve momentlerin hesaplamalarını yaparken **Vektör matematiği**ni kullanmak gerekir. Çünkü kuvvetlerin etkisi, **şiddet ve açıyla** ortaya çıkar (yani kuvvet bir **vektörel büyüklüktür**). Vektör matematiği ile statikte **denge denklemleri**, dinamikte ise **hareket denklemleri** kolayca oluşturulur. Elde edilen bu denklemler içerisinde hareketin bağlı bulunduğu değişkene göre hareketin **her adımı** çözülebilir. Bu durum sistemin çözümünde programlanabilir bir model oluşturmayı sağlar. Böylece bir periyotluk tüm hareketin davranışları incelenebilir.

A-Statiğin Temel İlkeleri

Cismin üzerindeki kuvvetler

Bir cismin (yada mekanizmanın) üzerindeki kuvvet ve momentleri üç grupta toplayabiliriz.

a) **Dış kuvvetler**: Cisme dışarıdan etki eden kuvvetlerdir. Buna sürtünmelerde dahildir.

b) **Atalet kuvvetleri**: Hareket halindeki sistemlerde ivme nedeniyle kütlenin ortaya çıkardığı kuvvetlerdir. Statik sistemde oluşmaz.

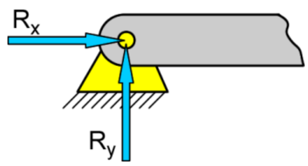
c) **Bağ kuvvetleri**: Sistemi oluşturan cisimleri birbirine bağlayan kuvvetlerdir. Bağlar arasındaki sürtünme kuvvetleri de dahildir. İki grupta ele alınabilir.

i) <u>Mafsal kuvvetleri</u>: Hareketli uzuvların kendi aralarında oluşan bağ kuvvetleridir.

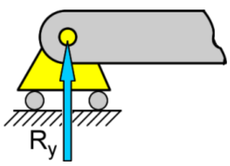
ii) <u>Mesnet kuvvetleri</u>: Hareketli uzuvlar ile sabit şase arasındaki kuvvetlerdir.

Mesnet tepkileri

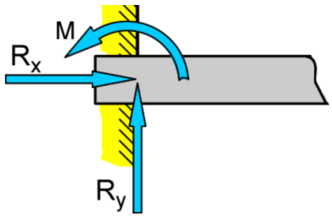
Mesnetlerin bağlantı şekline bağlı olarak çeşitli **tepki kuvvetleri** oluşur. Bu kuvvetlerin yönü ve şeklinin bilinmesi sistemin statik hesabı için bilinmesi gerekir.



Sabit Mesnet



Kayar Mesnet



Ankastre Mesnet

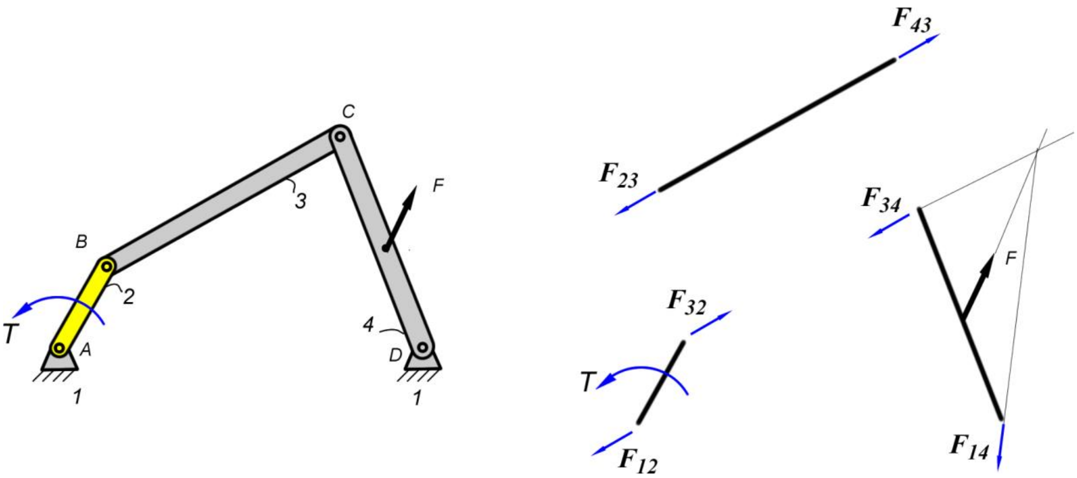
Serbest Cisim Diyagramının Çizimi

Problem çözümünde serbest cisim diyagramının çizimi büyük önem taşır. Mekanizmanın parçalara ayrılıp bütün **iç ve dış kuvvetlerin gösterildiği** diyagramlara **Serbest Cisim Diyagramı** denir.

Mekanizmalarda serbest cisim diyagramını çizmek için öncelikle elemanlar **birbirinden ayrılmış olarak** çizilir. Elemanlara etki eden **dış kuvvetler** gösterilir. Elemanlara etki eden iç kuvvetleri göstermek için ise şu sıralama takip edilir.

a) İlk olarak **iki kuvvetin etkisi** altında bulunan elemanların üzerindeki kuvvetler gösterilir. Bu kuvvetler komşu elemanlara tepki kuvveti olarak aktarılır.
b) Ardından üzerinde **iki kuvvet bir moment** olan elemanlara etki eden kuvvetlerin yönleri belirlenir. Bulunan kuvvetler komşu elemanlara tepki kuvveti olarak yansıtılır.
c) Son olarak **üzerinde 3 kuvvet** bulunan elemanların kuvvetleri belirlenir.

İç kuvvetlere isim verirken **F_{32} şeklinde** elemanların numarası ile isim verilir. Bunun anlamı **3 nolu elemanın 2 ye** uyguladığı kuvvet demektir. 1 numaralı eleman ismi sabit şaseye verilir. Örnek olarak 4 çubuk mekanizmasının serbest cisim diyagramını çizelim.

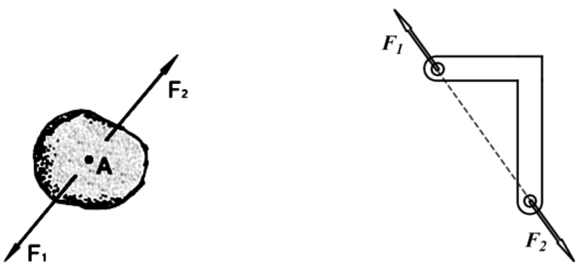


Statiğin dayandığı **temel bazı ilkeler** vardır. Bunlar;

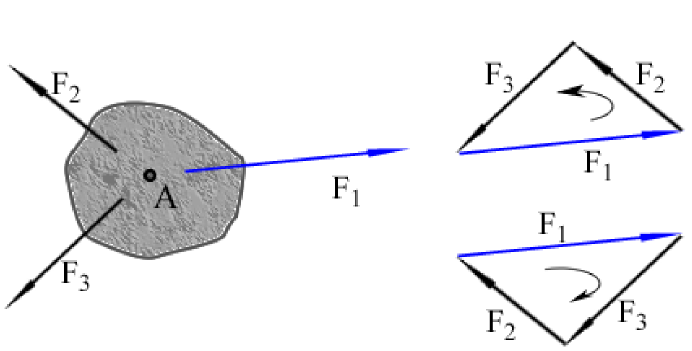
Statik Denge İlkesi

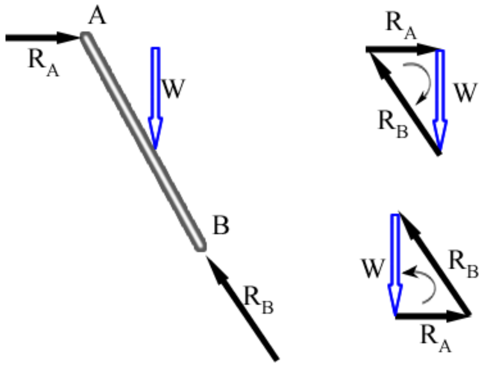
Rijit cismin üzerindeki **kuvvet sayısına** ve durumuna **bakarak denge için** aşağıdaki durumlar söz konusudur.

a) <u>Cismin üzerinde **iki kuvvet** varsa</u>: Bir rijit cisme sadece iki kuvvet etki ediyorsa, statik denge için bu iki kuvvetin **büyüklükleri aynı** ve **yönleri ters** olmalıdır. $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 \quad => \ \vec{F}_1 = -\vec{F}_2$



b) <u>Cismin üzerinde **üç kuvvet** varsa</u>: Cismin üzerinde üç tane kuvvet varsa statik denge için bu kuvvetlerin **doğrultusu bir noktada kesişmeli** ve **vektörel toplamı sıfır** olmalıdır. $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$ Vektörel toplam sıfır olunca kuvvetlerin oluşturduğu **poligon kapalı bir poligon** olacaktır. Poligonda **tüm vektörler aynı yöne** bakmalıdır. **Saatin tersi yönde alındıysa** hepsi poligon boyunca saatin tersi yönde olmalıdır.

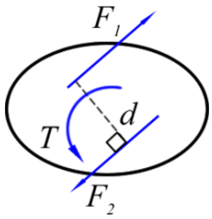




c) <u>Cismin üzerinde **iki kuvvet ve bir moment** varsa</u>: Bu durumda cismin statik olarak dengede olabilmesi için etki eden **kuvvetler paralel zıt yönde** olmalı ve oluşturdukları moment cismin üzerindeki **momente eşit ve zıt yönde** olmalıdır.

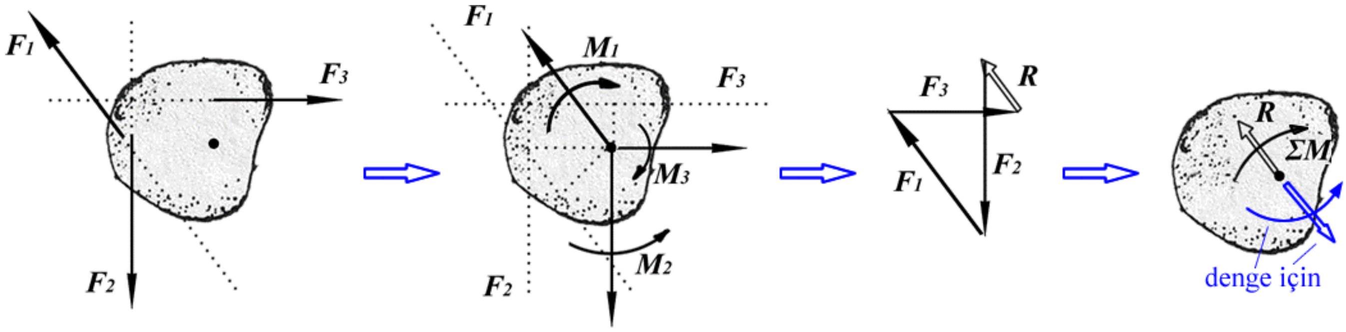
$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 \text{ ve } \vec{T} + \vec{F}_1 x \vec{d} = 0$$

Yani $F_1 = F_2$ ve $T = F_1 . d$ olmalıdır.



d) <u>**Bir Noktada Kesişmeyen** Kuvvetlerin Dengesi</u>**:** Doğrultuları farklı yönlerdeki **kuvvetler ortak bir noktaya** taşınarak birleştirilirse ortaya hem bir **bileşke kuvvet hem de bir moment** çıkar. (Not: Bir kuvvet bulunduğu doğrultudan yanlamasına farklı bir noktaya kaydırılırsa **kaydırılan mesafe kadar ortaya bir de moment** çıkar) Denge için kuvvetlerin bileşkesi sıfır yapılsa bile moment cismi hala döndürmeye çalışacaktır. Bu durumda denge için gerekli şart hem kuvvetlerin toplamının sıfır hem de momentlerin toplamının sıfır olması gerekir. Yani ortaya çıkan bileşke kuvvete zıt yönde eşit bir kuvvet ve ortaya çıkan toplam momente zıt yönde eşit bir moment uygulanırsa cismin hareketi durdurulabilir.

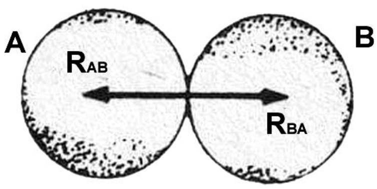
$$\sum F = 0 \quad \sum M = 0$$



Ödev: Şekildeki cismi yerinde tutabilmek için hangi hangi kuvvetler eklenmelidir?

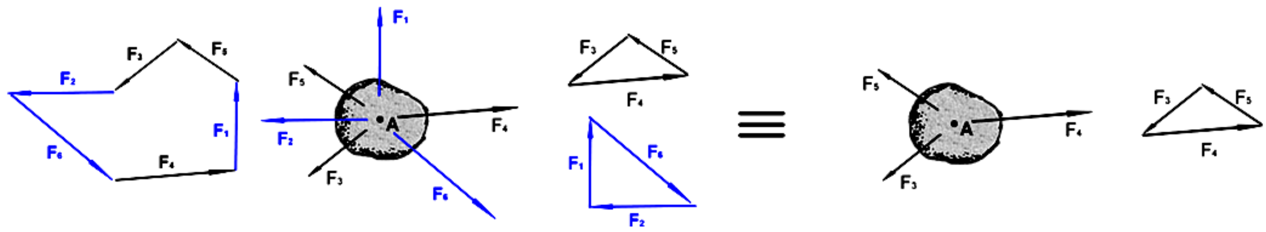
Etki-Tepki İlkesi

Birbirine dayalı iki cismin dayandıkları noktada kuvvetlerin doğrultuları ve şiddetleri aynı fakat yönleri terstir.



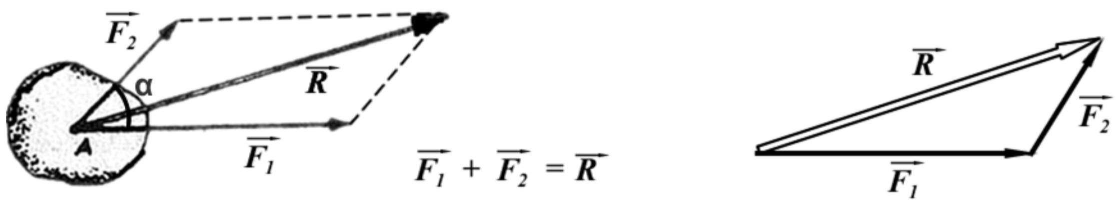
Süperpozisyon İlkesi

Bir rijit cisim birçok kuvvetin etkisi altında dengede ise, bu kuvvetlerin arasından dengede olan bir grup kuvvetin çıkarılması yada denge halindeki bir grup kuvvetin eklenmesi dengeyi bozmayacaktır.



Bileşke Kuvvetin Bulunması

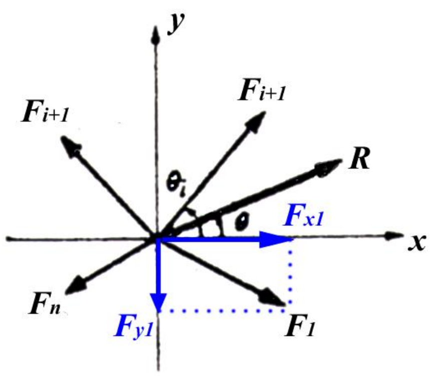
Vektörel Yöntem: Bir rijit cisme etki eden bir kuvvet aynı etkiyi gösterecek iki kuvvete ayrılabilir. Yada iki kuvvetin etkisi tek bir kuvvet ile gösterilebilir. Bunun için şekildeki gibi paralel kenar kullanılarak yada vektörel poligon ile işlemleri yapılabilir. Burada R bileşke kuvvet, F1 ve F2 ise Bileşen kuvvetler olarak adlandırılır.



Paralel kenar ilkesi ile iki kuvvetin bileşkesi şu şekilde bulunabilir.

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2\,F_1 F_2 Cos\alpha}$$

Analitik Yöntem: Bunun için öncelikle kuvvetler x ve y doğrultularında bileşenlere ayrılır. Daha sonra x ekseni doğrultusunda olanları kendi arasında ve y doğrultusunda olanlarda kendi arasında toplanır. Ardından iki kuvvete düşürdükten sonra bunların hipotenüs teorimi ile bileşkesi alınır.



$$R_x = \sum X \;\; => \;\; R_x = F_1\,.Cos\,\theta_1 + F_2\,.Cos\,\theta_2 + \;...$$

$$R_y = \sum Y \;\; => \;\; R_y = F_1\,.Sin\,\theta_1 + F_2\,.Sin\,\theta_2 + \;...$$

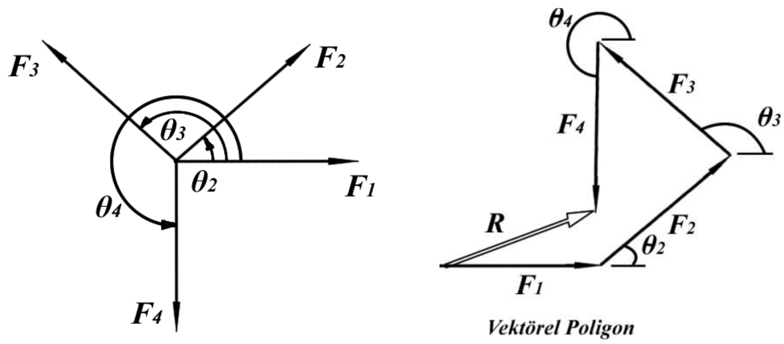
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

Bileşke kuvvetin x-ekseni ile yaptığı açı şu şekilde olacaktır.

$$tx\theta = \frac{R_y}{R_x}$$

Grafik Yöntem:

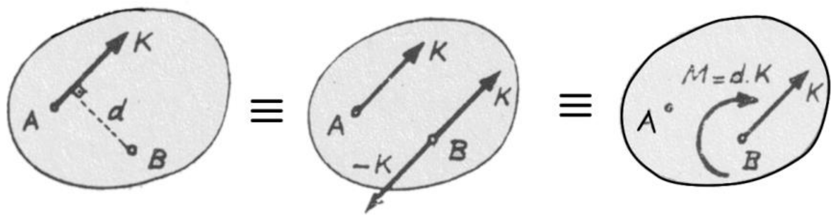
Şekildeki gibi kuvvetler uç uca eklendiğinde bir döngü oluşturacaktır. Başlangıç noktasını bitiş noktasına bağlayan vektör Bileşke kuvveti oluşturur. Kuvvetler ölçeklenerek cetvelle çizilir yada çizim programı kullanılır. Bulunan bileşke kuvvetin boyu tekrar ölçekle çarpılarak gerçek değeri bulunabilir.



Bir Kuvvetin Başka Bir Noktaya Taşınması

Bir kuvvetin aynı doğrultu üzerinde (tesir çizgisi üzerinde) kaydırılması sonucu değiştirmez. Kuvvetin bu çizgiden farklı bir noktaya taşınması, **taşındığı noktada** aynı şiddet ve doğrultuda **yine bir kuvvet** ve **taşındığı dik mesafe kadar bir moment etkisi** ortaya çıkarır.

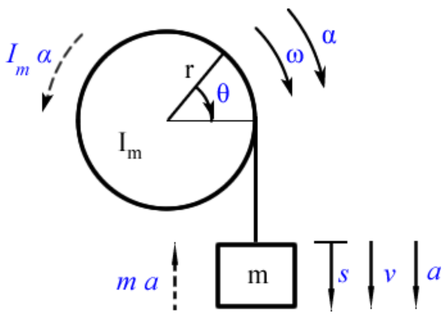
Bunu şu şekilde izah edebiliriz. A noktasında bir F kuvveti olsun. Bu kuvvet B noktasına taşınmak istensin. B noktasına **+F ve –F** kuvvetinin eklenmesi sonucu değiştirmez (Süperpozisyon prensibi). A noktasındaki +F kuvveti ile B noktasındaki –F kuvveti kuvvet çift oluştur ve bu da moment etkisi yapar. Kuvvet çiftinin moment etkisi cisim üzerinde her noktaya taşınabilir. Yani momentin dönme merkezi diye bir yer yoktur.



B-Dinamiğin Temel İlkeleri

Hareketleri temel olarak iki kısma ayırabiliriz. Doğrusal hareket ve dairesel hareket. Her iki hareketin formülleri de temelde benzerdir. Doğrusal konum ve açısal konumun üzerine, doğrusal hız ve açısal hızlar bina edilir. Ardından doğrusal ivme ve açısal ivmeler hesaplanır. Doğrusal ivme ile kütlenin çarpımı atalet kuvvetini doğurur. Açısal ivme ile kütlesel atalet momentinin çarpımı da atalet momentlerini doğurur. Bu şekilde harekete ait büyüklükler bulunur. Temel dinamik hesaplarda ihtiyacımız olan tüm formülleri aşağıdaki şekilde tablo halinde toplayabiliriz. Burada eğrisel hareket (t-n koordinatlar) ve polar hareket (r-θ koordinatlar) formüllerine ihtiyaç olmayacaktır.

Büyüklüğün adı	**Doğrusal Hareket**	**Dairesel Hareket**
Aşağıdaki formüller **ivme değişken** veya her durumda hesapla yapabileceğimiz genel formüllerdir.		
Konum	s [m]	θ [rd]
Hız	$v = \frac{ds}{dt}$ [m/s]	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$ [rd/s]

İvme	$a = \frac{dv}{dt}$ [m/s²]	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ [rd/s²]
Zamansız formül	$v\, dv = a\, ds$	$\omega\, d\omega = \alpha\, d\theta$
(**a=sabit**) **İvme sabit** ise daha basit kullanım için aşağıdaki formüller kullanılır. (Üstteki formüller genel formüllerdir, bunlarda kullanılabilir)		
Konum	$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a\, t^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha\, t^2$
Hız	$v = v_0 + a\, t$	$\omega = \omega_0 + \alpha\, t$
Zamansız formül	$v^2 = v_0^2 + 2a\,(s - s_0)$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\,(\theta - \theta_0)$
Doğrusal ve Açısal Hareketlerin Dönüşüm Formülü (Doğrusal büyüklükler aynı zamanda teğetsel büyüklüklerdir)		
	$F = m\, a$ (atalet kuvveti)	$M = I_m\, \alpha$ (atalet momenti)
	$P = m\, v$ (doğrusal momentum)	$L = I_m\, \omega$ (açısal momentum)
	$E = \frac{1}{2} m\, v^2$(doğr. kinetik enerji)	$E = \frac{1}{2} I_m\, \omega^2$ (açısal kinetik enerji)
	$s = r\, \theta$	
	$v = r\, \omega$	
	$a_t = r\, \alpha$ (dairesel harekette teğetsel ivme)	
	$a_n = r\, \omega^2$ (dairesel harekette merkezcil (normal) ivme)	

Kütle atalet momenti (I_m)

Doğrusal harekette ivmeye direnç gösteren etki cismin kütlesi iken, Dairesel harekette açısal ivmeye direnç gösteren büyüklük **kütle atalet momenti** (I_m) dir (*yada eylemsizlik momenti olarak isimlendirilir*) (Sembolü $\mathbf{J_m}$ olarak da gösterilebilir). Kütle ivmeye direnç (atalet) gösteren maddenin değişmeyen büyüklüğüdür. Uzayda da dünyada da ivmeye karşı aynı etkiyi üretir. Bu nedenle maddenin kütlesi hiçbir yerde değişmez (*ağırlıkla karıştırılmamalı. Ağırlık kütle ile ivmenin çarpımı sonucu ortaya çıkan N cinsinden kuvvettir. Ayda ve dünyada çekim kuvvetleri farklı ivme üreteceğinden ağırlıklar değişir*). Doğrusal kütle (bildiğimiz kütle) hareket esnasında cismin şeklinden bağımsızdır. Yani şeklinin bir önemi yoktur. Fakat dairesel kütle (kütle atalet momenti) cismin şekline ve dönme eksenine bağlı olarak değişir. Bu nedenle aynı cismi farklı eksenlerden döndürdüğümüzde kütle atalet momenti değişecektir.

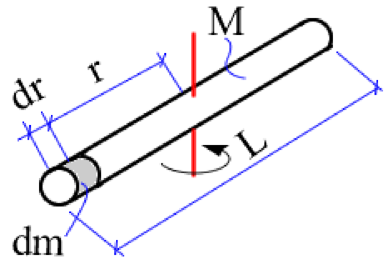
Kütle Atalet Momentinin Hesaplanması:

m kütleli noktasal bir cisim r uzaklığındaki bir eksen etrafında dönerse bu cismin eylemsizlik momenti mr^2 olarak tanımlanır. Eğer cisim çok sayıda parçacıktan oluşmuşsa her bir parçacığın kütle atalet momenti toplanarak cismin tamamı için sonuç bulunur. Yani cisim sonsuz küçüklükteki dm kütlelerinden meydana geliyorsa bu cismin eylemsizlik momenti aşağıdaki formülle bulunabilir.

$$I_m = \int r^2 dm$$

Örnek 1: Kütle Atalet Momentinin formülünün integralle bulunması

L boyundaki M kütleli düz ince bir çubuğun kütle merkezinden geçen eksene göre eylemsizlik momentini (kütle atalet momenti) şöyle hesaplayabiliriz.



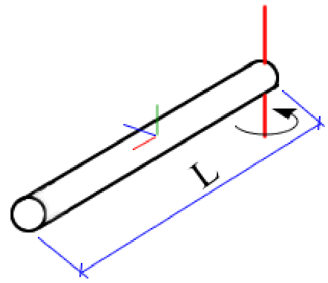
- dr boyundaki küçük bir parçanın kütlesi şu şekilde bulunur. M kütleli cismin boyu L ise her birim uzunluğun kütlesi $\frac{M}{L}$ olur. Bunu sonsuz küçük uzunlukta bir boyla çarparsak (dr ile çarparsak) o zaman sonsuz küçük cismin kütlesi $dm = \frac{M}{L}dr$ olur.
- Eksen çubuğun kütle merkezinden geçtiği için integralin sınırları $-\frac{L}{2}$ ve $+\frac{L}{2}$ olur. Bulduğumuz $dm = \frac{M}{L}dr$ yi formülde yerine koyarsak
- M ve L sabit olduğundan integralin dışında çıkar. İntegrali çözersek bu şeklin kütle atalet momenti aşağıdaki şekilde olur.

$$\boldsymbol{I_m} = \int_{-L/2}^{L/2} r^2 dm = \int_{-L/2}^{L/2} r^2 \frac{M}{L} dr = \frac{M}{L}\int_{-L/2}^{L/2} r^2 dr = \frac{M}{L}\left[\frac{r^3}{3}\right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{M}{L}\frac{1}{3}\left[\frac{L^3}{8} - \left(-\frac{L^3}{8}\right)\right] = \frac{M}{L}\frac{1}{3}\left[\frac{2L^3}{8}\right] = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}\boldsymbol{ML^2}$$

Paralel Eksenler Teoremi ile Farklı bir eksende hesaplama:

Bir cismin kütle merkezinden geçen eksene göre Kütle Atalet Momentini biliyorsak, başka bir eksene göre kütle atalet momentini aşağıdaki formülle hesaplayabiliriz. Kütle merkezine göre atalet momentinin üzerine, cismin kütlesini ile dik uzaklığın çarpımını eklediğimizde sonucu verecektir.

$$I_m = I_{km} + Md^2$$



Örnek 2: Kütle Atalet Momentinin Formülünün Paralel Eksenler Teoremi ile bulunması

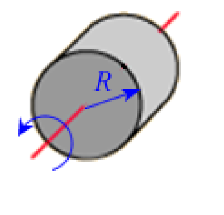
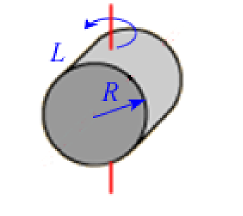
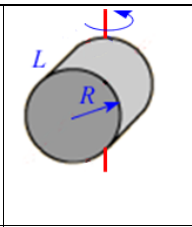
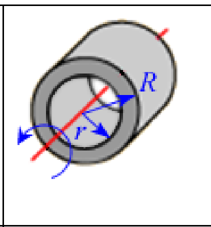
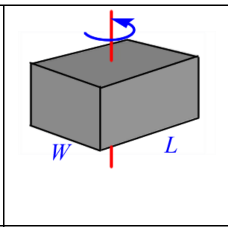
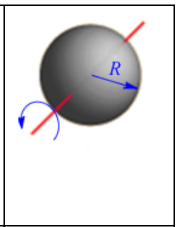
Yukarıdaki ince çubuğun kütle merkezine göre kütle atalet momenti $\frac{ML^2}{12}$ idi. Çubuğun merkezinden uç kısma uzaklığı $L/2$ dir. O zaman uç noktaya göre kütle atalet momenti şu şekilde olur.

$$\boldsymbol{I_m} = \frac{ML^2}{12} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{ML^2}{12} + \frac{ML^2}{4} = \frac{ML^2 + 3ML^2}{12} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{ML^2}$$

Not: Burada hesaplanan çubuğun son derece ince olması gerekir. Çünkü formüller hesaplanırken sonsuz küçük eleman üzerinden yapıldı. Eğer çubuğun çapı artarsa formülde değişecektir. Bunun formülün çıkarılması ödev olarak verilecektir.

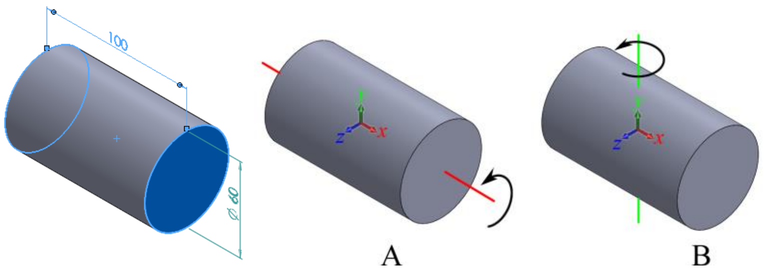
Bazı Şekillerin Kütle Atalet Momentleri:

Bazı şekillerin kütle atalet momenti aşağıda verilmiştir. Herhangi bir şeklin kütle merkezine göre eylemsizlik momenti biliniyorsa, istenen eksene göre yukarıdaki paralel eksenler teoremi kullanılarak daha çok örnek geliştirmek mümkündür.

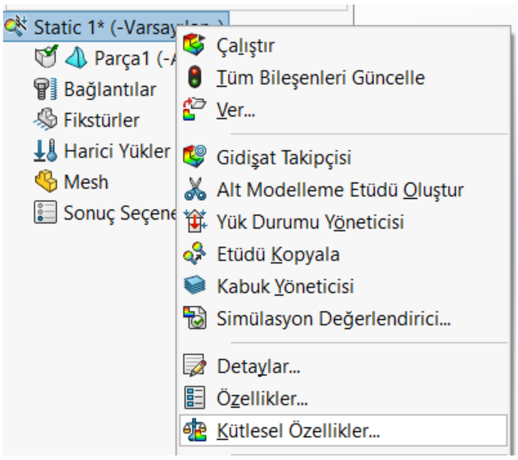
					
$I_m = \frac{1}{2} m\, R^2$	$I_m = \frac{1}{4} m\, R^2 + \frac{1}{12} m\, L^2$	**Ödev: Bunun formülünü çıkarın yada internetten bulun**	$I_m = \frac{1}{2} m\, (r^2 + R^2)$	$I_m = \frac{1}{12} m\, (W^2 + L^2)$	$I_m = \frac{2}{5} m\, R^2$
Silindir (Kütle merkezinden eksenel döndürülüyor)	Silindir (kütle merkezinden enine döndürülüyor)	Silindir (uç kısmından dönüyor)	Çember (Eksenden döndürülüyor)	Prizma (kütle merkezinden dönüyor	Küre (İçi dolu)

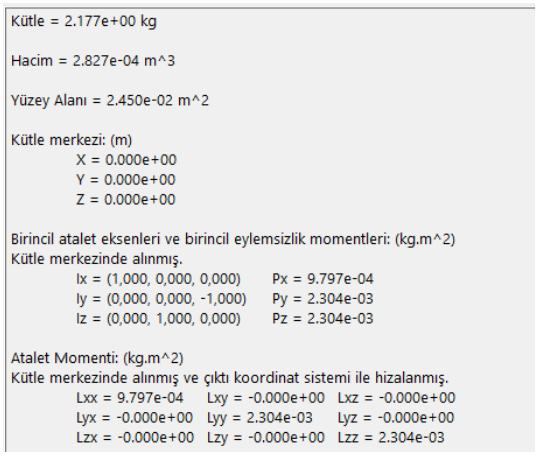
Örnek 3: Kütle Atalet Momentinin hem Formülle hem de Solidworks ile bulunması ve sonuçların karşılaştırılması

Aşağıdaki silindirin çeşitli eksenlerden döndürmeye karşı direncini gösteren "Kütle Atalet Momentlerini" hesaplayın, hesapların doğruluğunu Solidworks ile ispatlayın.



Çözüm: Parçayı solidwork de çizdikten sonra simülasyon kısmında statik analizi açalım. Parçaya bir malzeme atayalım (kütlesinin ortaya çıkması için malzeme atanmalı). Alaşım çelik malzemesi atandı. Solidworks te parça çizilirken orijin tam orta kısma denk getirildiğinde üç eksende oluşan kütlesel atalet momentleri aşağıdaki gibi çıkmıştır.





Kütle = 2.177e+00 kg

Hacim = 2.827e-04 m^3

Yüzey Alanı = 2.450e-02 m^2

Kütle merkezi: (m)
X = 0.000e+00
Y = 0.000e+00
Z = 0.000e+00

Birincil atalet eksenleri ve birincil eylemsizlik momentleri: (kg.m^2)
Kütle merkezinde alınmış.
Ix = (1,000, 0,000, 0,000)   Px = 9.797e-04
Iy = (0,000, 0,000, -1,000)   Py = 2.304e-03
Iz = (0,000, 1,000, 0,000)   Pz = 2.304e-03

Atalet Momenti: (kg.m^2)
Kütle merkezinde alınmış ve çıktı koordinat sistemi ile hizalanmış.
Lxx = 9.797e-04   Lxy = -0.000e+00   Lxz = -0.000e+00
Lyx = -0.000e+00   Lyy = 2.304e-03   Lyz = -0.000e+00
Lzx = -0.000e+00   Lzy = -0.000e+00   Lzz = 2.304e-03

Şimdi bulduğumuz sonuçları hesapla bulalım.

A) A parçası için dönme ekseni x eksenidir. Buna göre formülümüz aşağıdaki şekilde oluşur.

$$I_{mx} = \frac{1}{2} m\, R^2 = \frac{1}{2} 2.177\ (kg).(0.03)^2\ (m^2) = 0{,}00097965 = 9.7965x10^{-4}\ [kgm^2]$$

Sonuçlar Solidworks ile aynıdır.

Px = 9.797e-04   Lxx = 9.797e-04   (kg.m^2)

B) B parçasında dönme ekseni y ekseni olduğundan aynı ekran görüntülerini bu parça içinde kullanabiliriz. Öncelikle hesaplayarak bulalım.

$$I_{my} = \frac{1}{4} m\, R^2 + \frac{1}{12} m\, L^2 = \frac{1}{4} 2.177\ (kg)\ (0.03)^2 (m^2) + \frac{1}{12} 2.177\ (kg)\ (0.1)^2\ (m^2) = 0{,}00230399 = 2.3039x10^{-3}\ [kgm^2]$$

Sonuçlar Solidworks ile aynıdır.

Py = 2.304e-03 Lyy = 2.304e-03 (kg.m^2)

B parçası için z ekseni hesaplamaya gerek yoktur. y ekseni ile aynı sonuçtur (I_{mz}=2.3039x10^{-3}). Solidworks çıktısında da aynı olduğu gözükmektedir.

Pz = 2.304e-03 Lzz = 2.304e-03

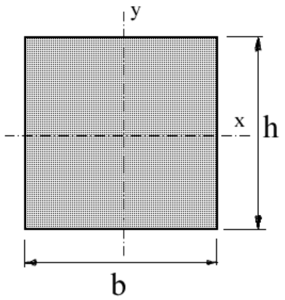
-------------------------------------- 000 ---

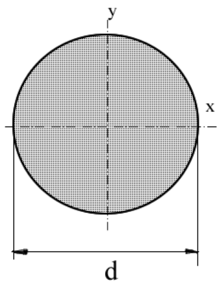
Hatırlatma: Kütle atalet momenti (I_m) ile Alan Atalet Momenti (I_x) ve Polar Atalet Momentin (I_p) farkı

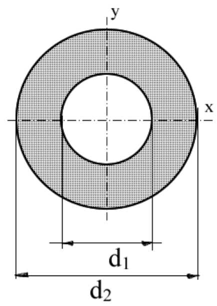
Kütle atalet momentinin, **alan atalet momenti** (I_x yada I_y) ile karıştırılmaması gerekir. Alan atalet momenti cismin eğildiği eksene göre kesitinin eğilmeye karşı direncini ifade eder.

Benzer şekilde **polar atalet momenti** (I_p)de iki eksende hesaplanan toplam alan direncini ifade eder. Yani iki eksendeki direnç cismin kesitinin burulmaya karşı direncini ifade eder.

Bazı şekillerin alan atalet momenti ve polar atalet momentleri aşağıda verilmiştir. Bunların dinamikle bir alakası yoktur. Mukavemet konusu ile ilgilidir. Karıştırılmaması için buraya konulmuştur.







$$I_x = \frac{b\,h^3}{12}, \quad I_y = \frac{h\,b^3}{12} \qquad I_x = \frac{\pi\,d^4}{64} \qquad I_x = \frac{\pi}{64}(d_2^4 - d_1^4)$$

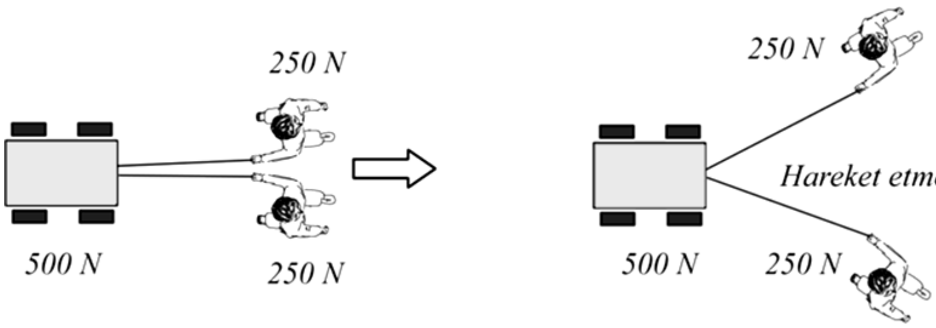
$$I_p = I_x + I_y \qquad I_p = \frac{\pi\,d^4}{32} \qquad I_p = \frac{\pi}{32}(d_2^4 - d_1^4)$$

C-Vektör Matematiği

Mekanizmaların hesaplarında Vektörel hesaplamaların kullanılması grafik ve diğer yöntemlere göre üstünlüklere sahiptir. Diğer yöntemlerde mekanizmanın fotoğrafının çekildiği esnadaki bir konum için sonuçlar bulunur. Oysa mekanizmanın bir periyod boyunca tüm zamanlarında hesaplanması gerekir. Çünkü mekanizmanın üzerinde oluşan maksimum kuvvetlerin hangi açıda ortaya çıktığı bilinemez. Maksimum değerleri görebilmek için her konum için hesaplama yapılmalı. Böyle bir durum onlarca hesaplama yapmayı gerekli kılar. Grafik yöntemle her durum için bu hesaplamaları yapmak zor bir işlem olur. Ayrıca günümüzde bilgisayarlar ile bu işlemleri yapmak gerekir. Böylece tüm uzuvlar ve üzerindeki konum, hız, ivme, kuvvet, moment değerlerinin grafikleri çizilebilir. Bu sayede maksimum durumlar için gerekli olacak motor güç hesapları yapılabilir. Bu amaçla bu derste kullanılacak hesap yöntemi olarak Vektörel hesaplamalar kullanılacaktır. Ayrıca program kullanarak istenilen değerlerin nasıl bulunacağı gösterilecektir.

Vektörel Büyüklük Nedir?: Şiddeti ve yönü bilinen büyüklüklere Vektör yada Vektörel Büyüklük denir. $\overrightarrow{F}$ şeklinde üzerinde okla birlikte sembolize edilir. F büyüklüğü ile $\overrightarrow{F}$ aynı şey değildir. Birincisi içerisinde kuvvetin büyüklüğünü gösteren bir değer barındırır. Örneğin 150 N gibi. Diğeri ise kuvvetin hem şiddetini hem de yönünü barındırır. Örneğin 150 N ve 30^0 açı ile uygulanmaktadır şeklinde bir anlam ifade eder.

Şekildeki gibi bir cismi eşit kuvvetteki iki kişi aynı yöne doğru çektiğinde hareket ettirebilmektedir. Fakat yönleri açıldığında etkileri azalmakta ve cismin hareketi imkansız hale gelmektedir. Buradan anlaşılan; kişilerin uyguladığı kuvvet değişmese bile yönleri değiştiği zaman yapacağı etki değişmektedir. Buda kuvvetin vektörel bir kavram olduğu, sadece büyüklüğünü vermenin etkisini anlamak açısından yetmeyeceği, yönünü de bilmek gerektiğini ortaya kor.

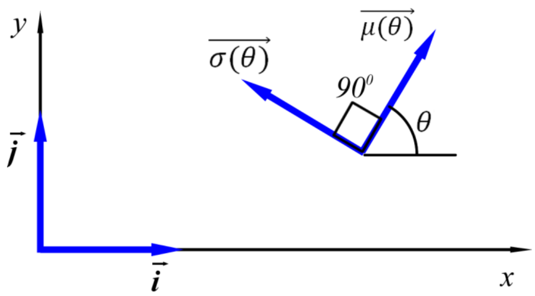


Kuvvetin vektörel olması nedeniyle farklı açılarda gösterdiği etkileri.

Benzer şekilde konum da vektörel bir büyüklüktür. Örneğin savaşta "düşman 300 metre ötede" diye komutan seslense atış yapacak asker etrafına bakınır nereye atacağını bilemez. Oysa "düşmen saat 3 istikametinde 300 metre ötede" diye seslense, atıcı doğrultusunu ayarlar 3 istikametine döner ve atışını yapar. Dolayısı ile bir şeyin konumunu belirtirken de yön ve mesafeye ihtiyaç vardır. Yani vektörel gösterime ihtiyaç vardır.

Birim Vektör: Birim vektör boyu 1 birim olan vektördür. Bu vektör içerisinde aynı zamanda bir açı barındırır. Tüm vektörlerin açısı X ekseninden itibaren alınır. Eğer kullanılan birim vektörün açısı 0 ise x ekseni üzerinde demektir. x,y,z ekseni üzerindeki vektörler $\vec{\imath}, .\vec{\jmath},. \vec{k}$ ile gösterilir. Bu vektörlere Kartezyen birim vektörler denir.

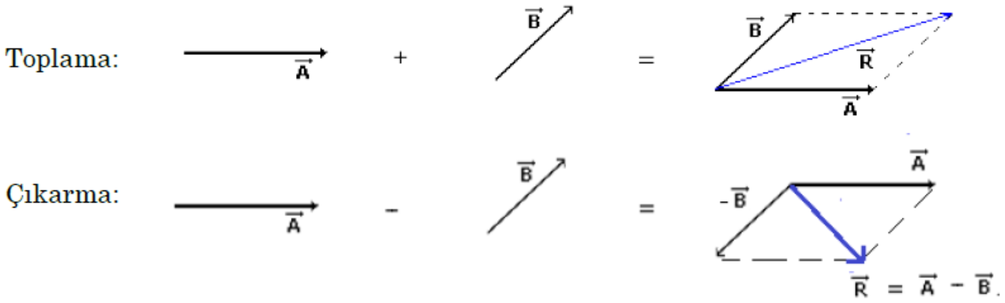
Farklı açılardaki bulanabilecek birim vektörler için çözümlerimizde $\overrightarrow{\mu(\theta)}$ ve $\overrightarrow{\sigma(\theta)}$ vektörlerini kullanacağız. Bu iki vektör birbirine dik iki vektördür. Aşağıdaki şekilde gösterilebilir. Buna göre her vektör şiddeti ile kendi doğrultusundaki birim vektörün çarpımına eşittir. $\vec{F} = F.\overrightarrow{\mu(\theta)}$ şeklinde yazabiliriz.



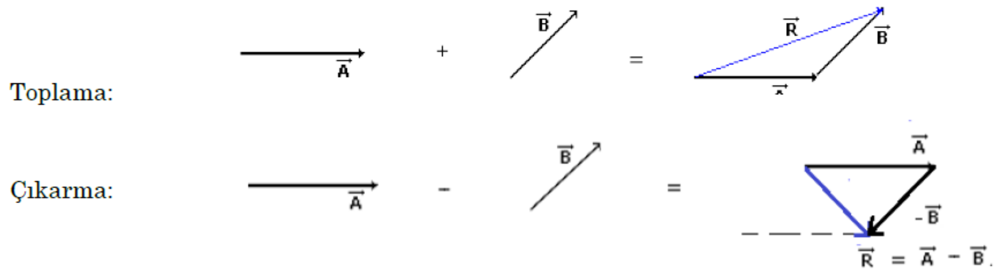
a) İki Vektörü Toplama ve Çıkarma:

Bunun için iki yöntem kullanılabilir.

a) Paralel Kenar Kuralı

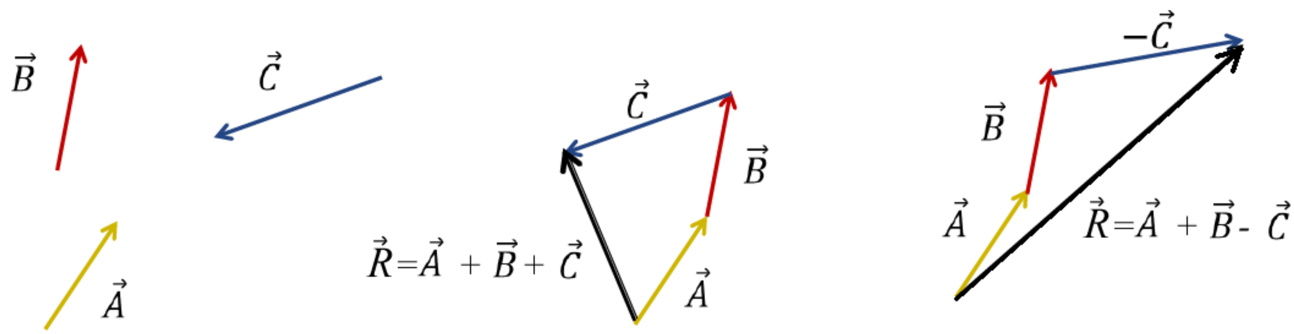


b) Üçgen Kuralı:



b) Birden Fazla Vektörün Toplanması ve Çıkarılması:

Bunun için üçgen kuralı daha pratiktir. Vektörler uç uca eklenir ve ilk vektörün başlangıcından son vektörün ucuna çizilen vektör bileşkeyi verir. Vektörlerin sırasının önemi yoktur. Çıkarılacak vektörün ise yönü ters çevrilerek eklenir.

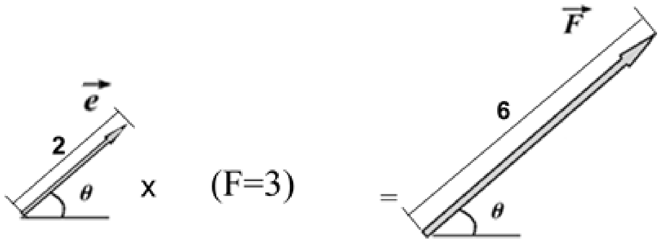


c) Bir Vektörün bir Skaler ile Çarpımı:

Çarpılan vektörün doğrultusu değişmez ama şiddeti değişir. Eğer sayı negatif ise vektör aynı doğrultu üzerinde yön değiştirir.

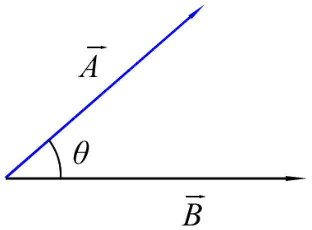
Herhangi bir skaler değer (sadece şiddeti içeren değer) birim vektörle skaler olarak çarpılırsa yeni vetkörün açısı aynı kalır ve şiddeti artmış olur. Skaler bir sayı ile çarpım vektörün yine skaler kısmını temsil eden şiddetini artırmış oluyor. Açısını değiştirmemiş oluyor.

$$\vec{e}\,.\,F = \vec{F}$$

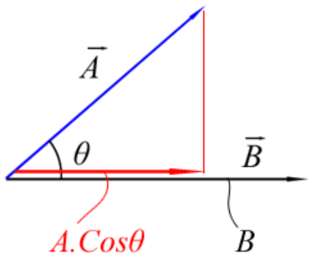


d) İki Vektörün Skaler Çarpımı:

İki vektörün skaler çarpımının sonucu **Skaler bir sonuç** verir. Sonuç aralarındaki açının Cosinisünün çarpımı ile bulunur. Skaler çarpım, vektörlerden birinin, diğerinin üzerine düşen dik bileşeninin çarpımıyla elde edilir. Skaler çarpımlarda nokta kullanılır.



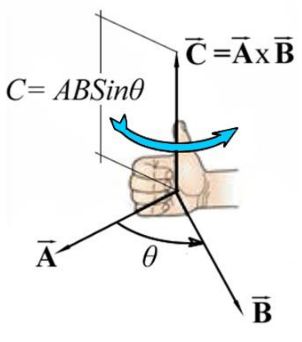
$$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|Cos\theta$$



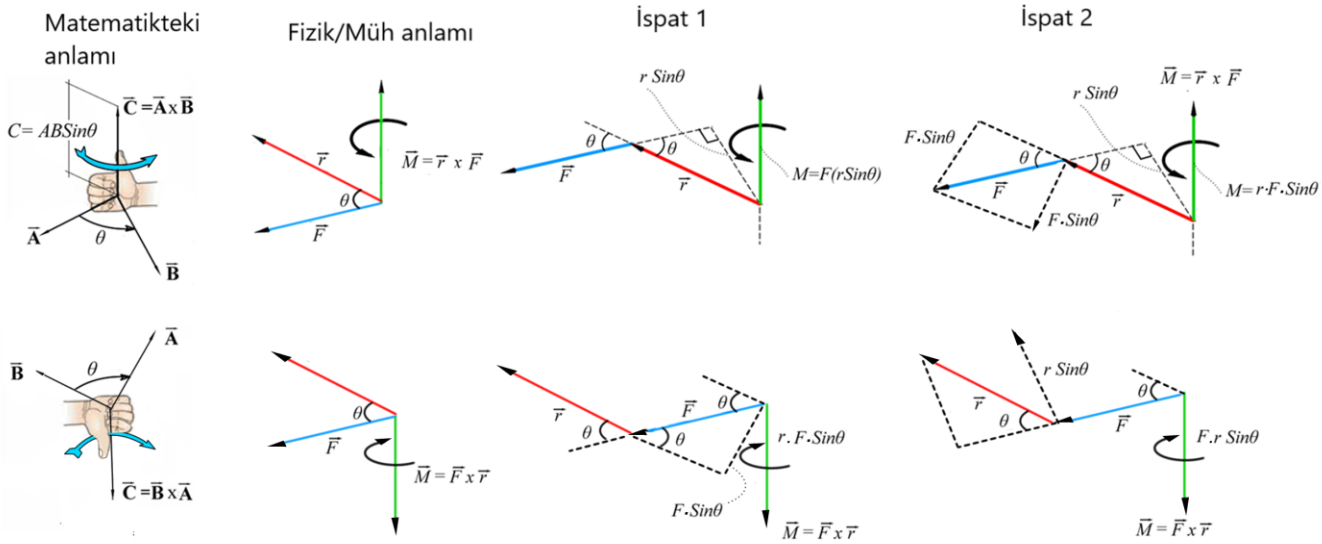
Skaler çarpım, iki vektörün birbirleriyle olan ilişkisini gösterir. Eğer skaler çarpım 0 ise, bu iki vektörün birbirlerine dik olduğunu gösterir. Pozitif bir skaler çarpım ise, vektörlerin aynı yöne doğru hareket ettiğini, negatif bir skaler çarpım ise, vektörlerin zıt yönlere doğru hareket ettiğini ifade eder. Skaler çarpımın mutlak değeri, iki vektörün doğrultularının ne kadar birbirine paralel veya dik olduğunu gösterir gösterir. Skaler çarpımın değişme özelliği vardır. Yerlerinin değişmesi sonucu değiştirmez.

e) İki Vektörün Vektörel Çarpımı:

İki vektörün vektörel çarpımının sonucu yine bir vektördür. Çıkan vektörün şiddeti, iki vektörün şiddetleri ile aralarındaki açının sinüsünün çarpımına eşittir. Yönü ise iki vektörün bulunduğu düzleme diktir ve sağ el kaidesiyle bulunur. İlk yazılan vektörden, ikinci yazılan vektöre doğru dönerken saatin tersi yönünde dönülüyorsa, çıkan vektör yukarı bakacaktır. Yada bunun tam tersi, ilk yazılan vektörden ikinci yazılan vektöre dönerken saatin yönünde dönülüyorsa, çıkan vektör aşağı bakacaktır. Vektörel çarpımlarda "x" işareti kullanılır.



Anlamsal olarak bakıldığında bu iki vektörün çarpımı bir momenti vermektedir. Momentin şiddeti yine buradaki gibi iki vektörün şiddetleri ile aralarındaki açının sinüsünün çarpımı ile bulunur. Yönü ise yine aynı şekilde sağ el kuralı ile belirlenir.



Vektörel çarpımda vektörlerin çarpım sırası önemlidir. Değişme özelliği yoktur. Vektörlerin sırası değişirse işareti tersine döner. Dağılma özelliği vardır. Bu özellikler aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

$$\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A} \qquad \vec{A} \times \vec{B} = -\left(\vec{B} \times \vec{A}\right) \qquad \vec{A}\,x\left(\vec{B} + \vec{C}\right) = \vec{A}\,x\,\vec{B} + \vec{A}\,x\,\vec{C}$$

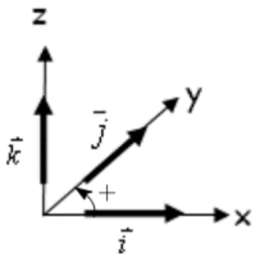
f) Kartezyen Birim Vektörlerin Vektörel Çarpımı:

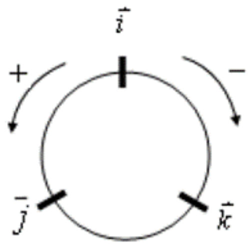
Aralarında 90 derece açı bulunan x,y,z eksenleri üzerindeki $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$,. $\vec{k}$ birim vektörlerinin çarpım sonuçlar sağ el kuralına göre belirlenirse aşağıdaki sonuçlara ulaşılır.

$\vec{\imath}\,x\,\vec{\jmath} = \vec{k}$ olur. Bu iki vektörün şiddeti ise yine 1 olur. $\vec{\imath}\,x\,\vec{\jmath} = 1.1.Sin90.\vec{k} = 1.\vec{k}$

$\vec{\imath}$, . $\vec{\jmath}$,. $\vec{k}$ vektörlerinden herhangi ikisinin çarpımı diğer 3. vektörü verir. İşareti ise sağ el kuralına göre bulunur. Sağ el kuralını daha kolay uygulamak için aşağıdaki şema kullanılabilir. Şemada saatin yönünde dönülürken + işareti tersi yönde dönerken - işareti kullanılır. Buna göre toplu olarak şu sonuçlar elde edilir.

$$\vec{\imath}\,x\,\vec{\jmath} = \vec{k} \qquad \vec{\jmath}\,x\,\vec{\imath} = -\vec{k}$$
$$\vec{\jmath}\,x\,\vec{k} = \vec{\imath} \qquad \vec{\imath}\,x\,\vec{k} = -\vec{\jmath}$$
$$\vec{k}\,x\,\vec{\imath} = \vec{\jmath} \qquad \vec{k}\,x\,\vec{\jmath} = -\vec{\imath}$$





Kartezyen birim vektörlerin kendisi ile <u>Vektörel çarpımının</u> skaler sonucu 0 dır. Kartezyen birim vektörlerin kendisi ile <u>Skaler çarpımının</u> sonucu ise 1 dir. Bir vektörün şiddeti yazılırken $|\vec{\imath}|$ şeklinde gösterilir.

$$|\vec{\imath}\,x\,\vec{\imath}| = |\vec{\imath}|\,|\vec{\imath}|\,Sin0 = 1.1.Sin0 = 0$$

$$|\vec{\imath}\,.\,\vec{\imath}| = |\vec{\imath}|\,|\vec{\imath}|\,Cos0 = 1.1.Cos0 = 1$$

İki farklı kartezyen vektörün Vektörel çarpımının skaler sonucu 1 dir. Skaler çarpımının sonucu ise 0 dır.

$$|\vec{\imath}\,x\,\vec{\jmath}| = |\vec{\imath}|\,|\vec{\jmath}|\,Sin90 = 1.1.Sin90 = 1$$

$$|\vec{\imath}\,.\,\vec{\jmath}| = |\vec{\imath}|\,|\vec{\jmath}|\,Cos90 = 1.1.Cos90 = 0$$

Vektör Özellikleri

1) $\boxed{a(\vec{A}+\vec{B})=a\vec{A}+a\vec{B}}$ (Vektörlerin skaler ile çarpımın dağılma özelliği. Yani, bir vektörün toplamı ile bir skalerin çarpımı, her bir vektörün aynı skalerle çarpımının toplamına eşittir. Bu özellik, vektörler ve skalerler arasındaki temel işlemlerden biridir ve vektörlerle yapılan birçok hesaplamanın temelini oluşturur)

2) $\boxed{a\vec{A}\ +\ b\vec{A}\ =(a\ +\ b)\vec{A}}$ (Vektörlerin skaler çarpımının birleştirme (toplanabilirlik) özelliği. Aynı vektörün farklı skalerlerle çarpımının toplamı, o skalerlerin toplamı ile vektörün çarpımına eşittir. Bu özellik, vektörler üzerinde skaler çarpımın ve toplamanın nasıl dağıldığını gösterir ve vektörel hesaplamaların temelini oluşturur.)

3) $\boxed{a\vec{A}\,x\,a\vec{B}=a.b(\vec{A}\,x\,\vec{B})}$ (Vektörlerin çapraz çarpım formülü. Bu özellik, vektörlerin çapraz çarpımı ile ilgili temel bir özelliktir ve lineer cebirde sıklıkla kullanılır.)

4) $\boxed{\vec{A}\,x\,(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\,x\,\vec{B}+\vec{A}\,x\,\vec{C}}$ (Vektörlerin çapraz çarpımının dağılma özelliği. Bir vektörün, iki vektörün toplamı ile çapraz çarpımı, o vektörün her biriyle ayrı ayrı çapraz çarpımının toplamına eşittir. Bu özellik, vektörlerin çapraz çarpımı ile ilgili temel bir özelliktir ve üç boyutlu uzayda vektörel hesaplamalarda sıkça kullanılır.)

5) $\boxed{\vec{A}\,.\vec{B}=\ \vec{B}\,.\vec{A}}$ (Vektörlerin skaler çarpımının değişme özelliğini ifade eder. İki vektörün skaler çarpımı, çarpımın sırasına bağlı değildir. Skaler çarpım, iki vektörün bileşenlerinin karşılıklı çarpımlarının toplamı olduğu için, çarpımın sırası sonucu değiştirmez. Bu özellik, vektörlerin skaler çarpımıyla ilgili temel bir özelliktir ve birçok vektörel hesaplama ve analizde kullanılır.)

6) $\boxed{\vec{A}\,x\,\vec{B}\neq\ \vec{B}\,x\,\vec{A}}$ (Vektörlerin vektörel çarpımının değişme özelliği yoktur. Aslında, bu iki vektörel çarpımın sonuçları birbirinin negatifidir: Bu, vektörel çarpımın yönüne bağlıdır. Vektörel çarpımın yönü, sağ el kuralıyla belirlenir ve iki vektörün sırasına bağlıdır. Bu yüzden, vektörlerin sırası vektörel çarpım sonucunu doğrudan etkiler. Yani bu çarpımın eşiti aşağıdaki şekilde alınırsa doğrudur. $\boxed{\vec{A}\,x\,\vec{B}=\ -(\vec{B}\,x\,\vec{A})}$

7) $\boxed{\vec{A}\,.\vec{B}=\ |\vec{A}|\,.\,|\vec{B}|.Cos\theta}$ (Bu formül, vektörlerin skaler çarpımını ve bu çarpımın geometrik yorumunu ifade eder. İki vektörün skaler çarpımı vektörlerinin büyüklüklerinin çarpımı ile aralarındaki açının kosinüsünün çarpımına eşittir. Burada $|\vec{A}|$ ve $|\vec{B}|$ ifadeleri vektörlerinin büyüklükleridir, ve θ vektörleri arasındaki açıdır. Bu formül, vektörler arasındaki ilişkiyi açıklamada ve birçok vektörel hesaplama ve analizde kullanılır.)

8) $\boxed{\vec{A}\,x\,\vec{B}=\ |\vec{A}|\,.\,|\vec{B}|.Sin\theta\,\vec{n}}$ (Vektörlerin vektörel çarpımını ifade eder ve geometrik olarak vektörler tarafından oluşturulan paralelkenarın alanını ve yönünü belirtir. İfade şu şekilde açıklanabilir: $|\vec{A}|$ ve $|\vec{B}|$ ifadeleri vektörlerinin büyüklükleridir ve θ vektörleri arasındaki açıdır. $\vec{n}$ birim vektörü, $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerine dik olan ve çapraz çarpımın yönünü belirleyen birim vektördür. Yön sağ el kuralı ile belirlenir. $\vec{A}$ vektör kolu, $\vec{B}$ kuvveti ifade edecek olursa ortaya bu çarpımdan moment çıkar ve momentin yönünü sağ el kuralına göre bunlara dik olan $\vec{n}$ vektörü belirler. Momentin büyüklüğü de $|\vec{A}|\,.\,|\vec{B}|.Sin\theta$ olur.)

Toplu olarak bu formülleri şu şekilde gösterelim.

1) $a(\vec{A}+\vec{B})=a\vec{A}+a\vec{B}$	5) $\vec{A}\,.\vec{B}=\ \vec{B}\,.\vec{A}$
2) $a\vec{A}\ +\ b\vec{A}\ =(a\ +\ b)\vec{A}$	6) $\vec{A}\,x\,\vec{B}=\ -(\vec{B}\,x\,\vec{A})$
3) $a\vec{A}\,x\,a\vec{B}=a.b(\vec{A}\,x\,\vec{B})$	7) $\vec{A}\,.\vec{B}=\ |\vec{A}|\,.\,|\vec{B}|.Cos\theta$
4) $\vec{A}\,x\,(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\,x\,\vec{B}+\vec{A}\,x\,\vec{C}$	8) $\vec{A}\,x\,\vec{B}=\ |\vec{A}|\,.\,|\vec{B}|.Sin\theta\,\vec{n}$

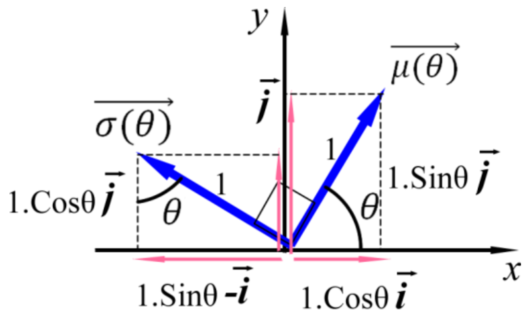
Birim Vektörlerle Yapılan Hesaplamalar

Vektörel denklemlerin çözebilmek ve sonuçların skaler olarak elde edilebilmesi için birim vektörlere ait işlem formüllerini kullanacağız. Bu denklemlerin nasıl oluşturulduğunun mantığını öğrenmekte çözümler yorum yapabilmeyi sağlar.

Herhangi bir θ açısına sahip $\overrightarrow{\mu(\theta)}$ ve $\overrightarrow{\sigma(\theta)}$ birim vektörlerini x ve y ekseni üzerindeki bileşenleri cinsinden yazarsak aşağıdaki şekilde olacaktır.

$$\overrightarrow{\mu(\theta)} = \mathrm{Cos}(\theta)\ \vec{\imath} + \mathrm{Sin}(\theta)\ \vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{\sigma(\theta)} = -\mathrm{Sin}(\theta)\ \vec{\imath} + Cos(\theta)\,\vec{\jmath}$$



Türev Formülleri:

Türevlerini değişken olan θ ya göre alırsak, aşağıdaki denklemleri elde ederiz.

$$\frac{d}{d\theta}\overrightarrow{\mu(\theta)} = (-\mathrm{Sin}(\theta)\ \vec{\imath} + \mathrm{Cos}(\theta)\ \vec{\jmath}\,)\ \dot{\theta} \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{d}{d\theta}\overrightarrow{\mu(\theta)} = \dot{\theta}.\overrightarrow{\sigma(\theta)}}$$

$$\frac{d}{d\theta}\overrightarrow{\sigma(\theta)} = (-\mathrm{Cos}(\theta)\ \vec{\imath} - \mathrm{Sin}(\theta)\ \vec{\jmath}\,)\ \dot{\theta} \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{d}{d\theta}\overrightarrow{\sigma(\theta)} = -\dot{\theta}.\overrightarrow{\mu(\theta)}}$$

Skaler Çarpım Formülleri:

$$\overrightarrow{\mu(\theta_n)}\,.\,\overrightarrow{\sigma(\theta_k)} = [\mathrm{Cos}(\theta_n)\ \vec{\imath} + \mathrm{Sin}(\theta_n)\ \vec{\jmath}].[-\mathrm{Sin}(\theta_k)\ \vec{\imath} + Cos(\theta_k)\vec{\jmath}]$$

$$= -\mathrm{Cos}(\theta_n)\,\mathrm{Sin}(\theta_k)\,\underbrace{\vec{\imath}\,\vec{\imath}}_{1} + \mathrm{Cos}(\theta_n)\,\mathrm{Cos}(\theta_k)\,\underbrace{\vec{\imath}\,\vec{\jmath}}_{0} - \mathrm{Sin}(\theta_n)\ \mathrm{Sin}(\theta_k)\,\underbrace{\vec{\imath}\,\vec{\jmath}}_{0} + \mathrm{Sin}(\theta_n)\ \mathrm{Cos}(\theta_k)\,\underbrace{\vec{\jmath}\,\vec{\jmath}}_{1}$$

$$= -\mathrm{Cos}(\theta_n)\,\mathrm{Sin}(\theta_k) + \mathrm{Sin}(\theta_n)\ \mathrm{Cos}(\theta_k) = Sin(\theta_n - \theta_k)$$

Not: Sin(a-b)=Sin a.Cosb-Cos a.Sinb ifadesine benzettik. Buna göre birim vektörlerin skaler çarpım sonucu şu şekilde olur.

$$\boxed{\overrightarrow{\mu(\theta_n)}\,.\,\overrightarrow{\sigma(\theta_k)} = Sin(\theta_n - \theta_k)}$$

Benzer şekilde diğer formülleri de çıkarırsak aşağıdaki sonuçları elde ederiz. Topluca **birim vektörlerin Skaler Çarpım Formüllerini** tablo şeklinde gösterelim. (Anlatırken kolay olsun diye "Dışlar" "İçler" ifadeleri kullanıldı) (Not: Cos ifadelerde açılar yazılırken yer değiştirebilir).

1) $\overrightarrow{\mu(\theta_n)}\,.\,\overrightarrow{\sigma(\theta_k)} = Sin(\theta_n - \theta_k)$ (Dışlar farklı, içler farklı) (μ açısı önce yazılmalı)

1) $\overrightarrow{\mu(\theta_n)}\,.\,\overrightarrow{\mu(\theta_k)} = Cos(\theta_n - \theta_k) = Cos(\theta_k - \theta_n)$ (Dışlar aynı, içler farklı)

2) $\overrightarrow{\sigma(\theta_n)}\,.\,\overrightarrow{\sigma(\theta_k)} = Cos(\theta_n - \theta_k) = Cos(\theta_k - \theta_n)$ (Dışlar aynı, içler farklı)

3) $\overrightarrow{\mu(\theta_n)}\,.\,\overrightarrow{\sigma(\theta_n)} = 0$ (Dışlar farklı, içler aynı)

4) $\overrightarrow{\mu(\theta_n)}\,.\,\overrightarrow{\mu(\theta_n)} = 1$ (Dışlar aynı, içler aynı)

5) $\overrightarrow{\sigma(\theta_n)}\,.\,\overrightarrow{\sigma(\theta_n)} = 1$ (Dışlar aynı, içler aynı)

Vektörel Çarpım Formülleri:

$$\overrightarrow{\mu(\theta_n)}\; x\; \overrightarrow{\mu(\theta_k)} = [\mathrm{Cos}(\theta_n)\ \vec{\imath} + \mathrm{Sin}(\theta_n)\ \vec{\jmath}]x[\mathrm{Cos}(\theta_k)\ \vec{\imath} + Sin(\theta_k)\vec{\jmath}] =$$

$$= \mathrm{Cos}(\theta_n)\,\mathrm{Cos}(\theta_k)\underbrace{\vec{\imath}\,x\,\vec{\imath}}_{0} + \mathrm{Cos}(\theta_n)\,\mathrm{Sin}(\theta_k)\underbrace{\vec{\imath}\,x\vec{\jmath}}_{\vec{k}} + \mathrm{Sin}(\theta_n)\ \mathrm{Cos}(\theta_k)\underbrace{\vec{\jmath}x\vec{\imath}}_{-\vec{k}} + \mathrm{Sin}(\theta_n)\ \mathrm{Sin}(\theta_k)\ \underbrace{\vec{\jmath}x\vec{\jmath}}_{0}$$

$$= \mathrm{Cos}(\theta_n)\,\mathrm{Sin}(\theta_k)\,\vec{k} - \mathrm{Sin}(\theta_n)\ \mathrm{Cos}(\theta_k)\,\vec{k}$$

$$= \left[-\mathrm{Cos}(\theta_n)\,\mathrm{Sin}(\theta_k)\,\vec{k} + \mathrm{Sin}(\theta_n)\ \mathrm{Cos}(\theta_k)\right]\vec{k}$$

$$= [\mathrm{Sin}(\theta_k)\,\mathrm{Cos}(\theta_n) - \mathrm{Cos}(\theta_k)\,\mathrm{Sin}(\theta_n)]\vec{k}$$

Not: denklemi Sin(a-b)=Sin a.Cosb-Cos a.Sinb) ifadesine benzettik. Buna göre birim vektörlerin vektörel çarpım formülü şu şekilde olacaktır.

$$\boxed{\overrightarrow{\mu(\theta_n)}\; x\; \overrightarrow{\mu(\theta_k)} = Sin(\theta_k - \theta_n)\vec{k}}$$

Benzer şekilde diğer formülleri de çıkarırsak aşağıdaki sonuçları elde ederiz. Topluca **birim vektörlerin Vektörel çarpım formülleri** şu şekilde olacaktır. (Anlatırken kolay olsun diye “Dışlar” “İçler” ifadeleri kullanıldı) (Not: Sin ifadelerde açıları yazılış sırasına dikkat edin. Yer değiştirirse sonuç yanlış çıkar)

1) $\overrightarrow{\mu(\theta_n)}\; x\; \overrightarrow{\mu(\theta_k)} = Sin(\theta_k - \theta_n)\vec{k}$ (Dışlar aynı, içler farklı)
2) $\overrightarrow{\sigma(\theta_n)}\; x\; \overrightarrow{\sigma(\theta_k)} = Sin(\theta_k - \theta_n)\vec{k}$ (Dışlar aynı, içler farklı)
3) $\overrightarrow{\mu(\theta_n)}\; x\; \overrightarrow{\sigma(\theta_k)} = Cos(\theta_n - \theta_k)\vec{k}$ (Dışlar farklı, içler farklı)
4) $\overrightarrow{\mu(\theta_n)}\; x\; \overrightarrow{\mu(\theta_n)} = 0$ (Dışlar aynı, içler aynı)
5) $\overrightarrow{\sigma(\theta_n)}\; x\; \overrightarrow{\sigma(\theta_k)} = 0$ (Dışlar aynı, içler aynı)
6) $\overrightarrow{\mu(\theta_n)}\; x\; \overrightarrow{\sigma(\theta_n)} = \vec{k}$ (Dışlar farklı, içler aynı)

Bazı Bilmemiz Gereken Matematik Formülleri

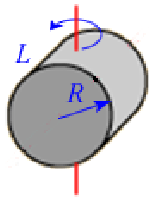
u, v, w ifadeleri değişkense ve çarpım halinde türevi alınacaksa aşağıdaki formüller kullanılır. Bu formülleri ileride birim vektörler ile çarpım işlemleri yaparken kullanacağız.

$$u.v = \frac{d}{dt}(u.v) = \dot{u}v + u\dot{v}$$

$$u.v.w = \frac{d}{dt}(u.v.w) = \dot{u}vw + u\dot{v}w + uv\dot{w}$$

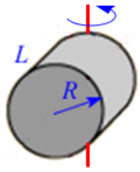
ÖDEVLER

Ödev 1: Yukarıda Örnek 1 de ince çubuğun Kütle atalet momenti formülü integralle bulunmuştu. Benzer şekilde aşağıdaki kalın silindirin yanında verilen **formülünü integralle** hesaplayarak çıkarın yada internetten bulmaya çalışın. (yabancı kaynakları da araştırın)

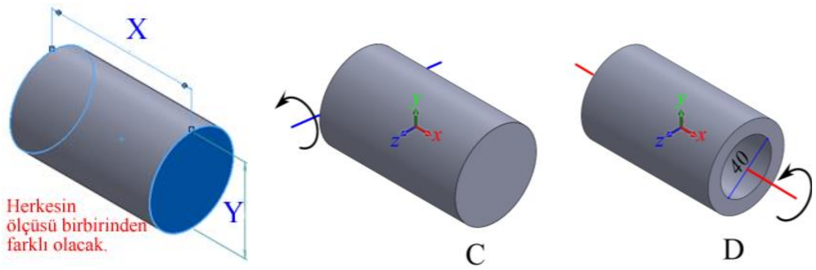


$$I_m = \frac{1}{4} m\, R^2 + \frac{1}{12} m\, L^2$$

Ödev 2: Yukarıda Ödev 1 de kütle merkezinden geçen eksene göre cismin I_m formülü verilmişti. Bu eksen silindirin eksen uçlarına alındığında formülü ne olacaktır? **Paralel eksenler teoremi** ile yada integral yöntemi ile bulmaya çalışın (yukarıdaki Örnek 2 yi inceleyin)



Ödev 3: Yukarıda Örnek 3 içerisinde verilen A ve B cisimlerinin Kütle atalet momentleri hem **formülle** hem de **Solidworks** ile bulunup sonuçlar karşılaştırılmıştı. Benzer uygulamayı sizde aşağıdaki C ve D cisimleri için yapın ve sonuçları karşılaştırın.



Ödev 4: Aşağıdaki mekanizmayı Solidworks'te çizdikten sonra dönme hareketi yapan tüm elemanların "Kütle Atalet Momentlerini-I_m" programla bulun. Her bir elemanı ayrı ayrı gösterip hangi eksene göre hesapladığınızı şekille gösterin. Bunun için şu bilgileri göz önünde bulundurun.

2 nolu eleman sadece dönme hareketi yapmaktadır. Ağırlık merkezinden geçen eksen etrafında döndüğünden I_m Ağırlık merkezine göre hesaplanmalı.

3 nolu eleman uzayda hem dönme hareketi hem öteleme hareketi yapmaktadır. Her iki ucu da hareket etmektedir ve aynı zamanda kendisi dönmektedir. Hareketi uzaysal yapmaktadır. Ağırlık merkezinden geçen 3 eksende de I_m hesaplanmalıdır.

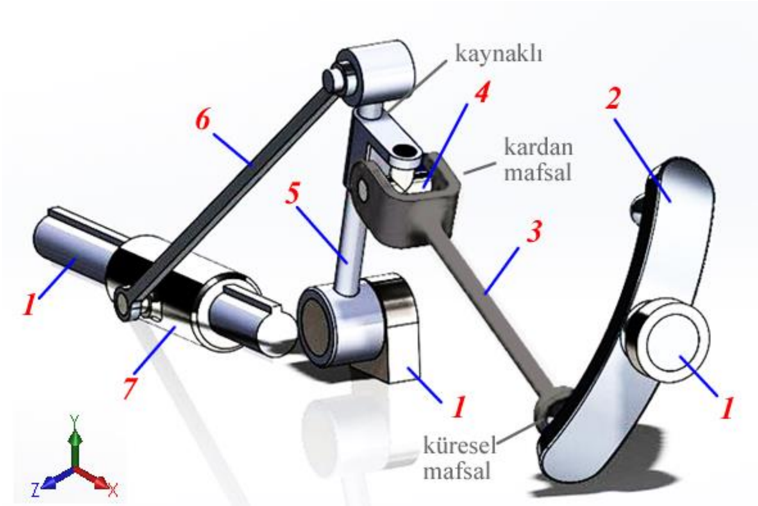
4 nolu kardan kavramanın istavrozu hem dönme hareketi, hem de öteleme hareketi yapar. Hareketi uzaysaldır. Dolayısı ile üç eksende de I_m hesaplanmalıdır.

5 nolu eleman düzlemsel olarak sadece dönme hareketi yapmaktadır (x-y düzleminde hareket ediyor). Önce ağırlık merkezine göre Im bulunmalı. Ardından şaseye bağlandığı dönme merkezine göre Paralel eksenler teoremi kullanılarak Im hesaplanmalıdır.

6 nolu eleman düzlemsel olarak hem dönme hareketi hem de öteleme hareketi yapmaktadır (iki ucu hareket ediyor). Dolayısı ile ağırlık merkezinden geçen Im hesaplayın.

7 nolu eleman sadece doğrusal hareket yapıyor. Bunun Im hesaplanmaz. Ama kütlesi önemlidir. Doğrusal hareketlerde kütle (m), dairesel hareketlerde ise (Im) önemlidir. Bunlar ivmeli hareket durumunda atalet etkilerini oluşturur.

1 nolu elemanlar şasedir. Hepsi 1 olarak gösterilir. Bunlar istenirse bir şekilde birbirine bağlanabilir. O nedenle şase tek bir uzuvdur.



Örnek 5: Yukarıda birim vektörlerin Vektörel çarpım formülleri verilmiştir. Bu formüllerden 1 tanesinin nasıl çıkarıldığı orada gösterilmiştir. Diğer formüllerin nasıl çıkarıldığını da siz bulun. Yani aşağıdaki vektörel formüllerin nasıl çıkarıldığını gösterin.

$$\overrightarrow{\mu(\theta_n)}\, x\, \overrightarrow{\mu(\theta_k)} = Sin(\theta_k - \theta_n)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{\sigma(\theta_n)}\, x\, \overrightarrow{\sigma(\theta_k)} = Sin(\theta_k - \theta_n)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{\mu(\theta_n)}\, x\, \overrightarrow{\sigma(\theta_k)} = Cos(\theta_n - \theta_k)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{\mu(\theta_n)}\, x\, \overrightarrow{\mu(\theta_n)} = 0$$

$$\overrightarrow{\sigma(\theta_n)}\, x\, \overrightarrow{\sigma(\theta_k)} = 0$$

$$\overrightarrow{\mu(\theta_n)}\, x\, \overrightarrow{\sigma(\theta_n)} = \vec{k}$$